ARCHIV FÜR METEOROLOGIE, GEOPHYSIK UND BIOKLIMATOLOGIE

HERAUSGEGEBEN VON

DOZENT DR. W. MÖRIKOFER
PHYSIKALISCH-METEOROLOGISCHES OBSERVATORIUM DAVOS

PROF. DR. F. STEINHAUSER
ZENTRALANSTALT FÜR METEOROLOGIE UND GEODYNAMIK WIEN

SERIE A
METEOROLOGIE UND GEOPHYSIK

BAND 12, 3. HEFT
MIT 38 TEXTABBILDUNGEN
(ABGESCHLOSSEN AM 24. OKTOBER 1961)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1961

Arch. Met. Geoph. Biokl. A.

Serie A, Band 12 **Inhaltsverzeichnis** Heft 3

Seite

Van Mieghem, J. Les bilans énergétiques approchés en variables λ, φ, p et t 287

Pichler, H. Theorie der räumlichen und zeitlichen Mittelbildung einer beliebigen Feldfunktion und ihre Anwendung in der Meteorologie. (Mit 16 Textabbildungen) 302

Markgraf, H. Zur Theorie der Tromben. (Mit 7 Textabbildungen) 339

Lelouchier, P. De l'efficacité des prévisions à courte et moyenne échéances de la pression atmosphérique, basées sur des informations locales de la pression. (Avec 4 Figures) 350

Saxer, L. und **W. Sigrist.** Tages- und Jahresgänge der luftelektrischen Elemente in Arosa. (Mit 7 Textabbildungen) 366

Malkowski, G. Über die absolute Dauer konvektiver Starkregen. (Mit 3 Textabbildungen) 376

Malkowski, G. Radarechos und Isobarenkrümmung. (Mit 1 Textabbildung) 382

Neumann, J. On an Effect of the Integral Scale of Turbulence on One-dimensional Spectra 389

Buchbesprechungen 396

Encyclopaedic Dictionary of Physics. Vol. I. Herausgegeben von J. Thewlis (F. Steinhauser). — Defant, A., Physical Oceanography. Vol. I und II (F. Steinhauser). — Methods and Techniques in Geophysics. Vol. I. Herausgegeben von S. K. Runcorn (F. Steinhauser). — Handbook of Geophysics. Herausgegeben von C. F. Campen, Jr., A. E. Cole, T. P. Condron, W. S. Ripley, N. Sissenwine, I. Solomon, Revised Edition (F. Steinhauser). — Toperczer, M., Lehrbuch der allgemeinen Geophysik (F. Steinhauser). — Geophysik. Herausgegeben von J. Bartels (Das Fischer Lexikon, Band 20) (M. Toperczer). — Some Ionospheric Results Obtained During the International Geophysical Year. Herausgegeben von W. J. G. Beynon (O. Burkard). — Queney, P., G. A. Corby, N. Gerbier, H. Koschmieder, J. Zierep, The Airflow over Mountains. Herausgegeben von M. A. Alaka (WMO Technical Note No. 34) (H. Reuter). — Sager, G., Ebbe und Flut (F. Steinhauser).

Das

„Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie"

erscheint in zwangloser Folge in zwei parallelen Serien:

Serie A Meteorologie und Geophysik: Allgemeine, theoretische und synoptische Meteorologie, Geophysik der Atmosphäre, des Meeres und des festen Erdbodens.

Serie B Allgemeine und biologische Klimatologie: Allgemeine und medizinische Klimatologie, Agrar- und Mikroklimatologie, Meteorobiologie, Strahlungsforschung.

Die beiden Serien können unabhängig voneinander bezogen werden. Die Hefte werden einzeln berechnet und zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt.

Das Archiv veröffentlicht wissenschaftlich einwandfreie Arbeiten von allgemein fachlichem Interesse. Es werden deshalb nur Originalarbeiten aufgenommen, die neue Erkenntnisse bringen, und zwar Aufsätze größeren Umfanges wie auch kleine Mitteilungen. Gelegentlich wird auch durch Sammelreferate über die neuesten Ergebnisse einzelner Spezialgebiete ein Überblick über den jeweiligen Stand eines bestimmten Problems gegeben, wobei besonders durch Hervorheben der noch ungelösten Fragen der weiteren Forschung Anreiz geboten werden soll. Schließlich weisen kritische Buchbesprechungen auf bedeutende Neuerscheinungen aus unserem Wissensgebiet hin.

Die Verfasser werden gebeten, den Text möglichst knapp zu fassen und historische Einleitungen tunlichst zu vermeiden. In den beigegebenen Tabellen ist die Wiedergabe unverarbeiteten, umfangreichen Beobachtungsmaterials zu vermeiden; auch sollen die Resultate im allgemeinen nicht durch Tabellen und Kurven gleichzeitig wiedergegeben werden. Die Tabellen sollen eine Überschrift tragen.

Die Arbeiten können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung in mindestens zwei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

551.511

(Institut Royal Météorologique de Belgique, Bruxelles)

Les bilans énergétiques approchés en variables λ, φ, p et t

Par

J. Van Mieghem

Université de Bruxelles

Résumé. L'auteur montre comment il faut déduire les formes approchées des bilans énergétiques des mouvements atmosphériques en variables λ,φ, p et t de leurs formes générales exactes. Il a tenu compte de la variabilité de la pression à la surface du globe.

Zusammenfassung. Es wird gezeigt, wie sich Näherungsformeln der Energiebilanzen der atmosphärischen Bewegungsvorgänge durch die unabhängigen Variablen λ, φ, p und t von ihrer exakten Formulierung ableiten lassen; dabei wird der Veränderlichkeit des Luftdrucks an der Erdoberfläche Rechnung getragen.

Summary. It is shown how the approximate energy equations of atmospheric motions expressed with the independent variables λ, φ, p and t must be derived from their exact general form. The variability of surface pressure has been taken into account.

1. — Les conversions et les transferts d'énergie qui accompagnent la circulation générale de l'atmosphère sont l'objet de recherches de plus en plus nombreuses et de plus en plus poussées, de sorte qu'il est fait un usage de plus en plus fréquent de certaines formes approchées des bilans énergétiques. Affirmer que ces bilans approchés soient toujours établis en respectant les règles de l'orthodoxie mathématique serait excessif. C'est pourquoi, nous avons cru utile de montrer comment des bilans énergétiques exacts on peut déduire, d'une manière rigoureuse, les bilans énergétiques approchés qu'il convient d'adopter lorsqu'on a en vue l'étude de la circulation générale.

Les bilans énergétiques s'écrivent d'une manière tout à fait générale de la manière suivante [4] :

$$\rho \frac{dk}{dt} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla p + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi + \rho D = 0 \tag{1.1}$$

et

$$\rho \frac{d}{dt}(e + \phi) + p \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi - \rho(\Delta + Q) = 0, \tag{1.2}$$

où ρ représente la masse spécifique de l'air, p la pression atmosphérique, $\boldsymbol{v}$ la vitesse de l'air par rapport à la terre, ϕ le géopotentiel (énergie potentielle par unité de masse), $k \equiv (1/2)\,\boldsymbol{v}^2$ l'énergie cinétique par unité de masse, e l'énergie interne spécifique, $e + \phi$ l'énergie potentielle totale (MARGULES, 1903) par unité de masse, D l'énergie cinétique dissipée par viscosité et Δ la fonction de dissipation qui exprime l'énergie cinétique convertie en chaleur par viscosité, par unité de masse et de temps, Q la quantité de chaleur fournie par le milieu ambiant à l'unité de masse par unité de temps, $\frac{\partial}{\partial t}$ l'opérateur de la dérivée locale par rapport au temps t, c'est-à-dire la dérivée par rapport au temps en un point fixe par rapport à la terre, ∇ l'opérateur de l'ascendant et $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$ l'opérateur de la dérivée individuelle par rapport au temps t, c'est-à-dire la dérivée par rapport au temps en suivant le mouvement de l'air.

Les formes (1.1) et (1.2) des bilans énergétiques sont indépendantes de tout système de coordonnées. La première équation se déduit de l'équation vectorielle du mouvement de l'air par rapport à la terre en multipliant scalairement cette équation par la vitesse $\boldsymbol{v}$. Quant à la deuxième équation, on l'obtient en ajoutant membre à membre l'équation fondamentale

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \rho(\Delta + Q) \tag{1.3}$$

du premier principe de la thermodynamique et l'identité

$$\rho \frac{d\phi}{dt} = \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi \,. \tag{1.4}$$

A l'échelle de la circulation générale de l'atmosphère, il est naturel d'introduire les deux hypothèses suivantes :

$$z \ll a \,, \tag{1.5}$$

où z est l'altitude d'un point de l'espace occupé par l'atmosphère et a le rayon moyen de la terre ;

$$\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho \cong 0, \tag{1.6}$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

La première hypothèse exprime que les dimensions horizontales de l'atmosphère sont très grandes par rapport à sa dimension verticale et la seconde, que les mouvements atmosphériques considérés (mouvements de grande échelle) sont quasi statiques. Dans ce cas, on sait combien il est préférable d'utiliser comme coordonnée verticale la pression p au lieu de l'altitude z.

Le problème qui se pose est celui de simplifier les équations (1.1) et (1.2) à l'aide des hypothèses (1.5) et (1.6) et de procéder à cette simplification en variables λ, φ, p et t où λ désigne la longitude et φ la latitude.

2. — A cet effet, rapportons d'abord l'espace occupé par l'atmosphère terrestre à un système de coordonnées sphériques λ, φ, $r = a + z$ dont l'origine est au centre de la terre. Dans ce système de coordonnées, la métrique de l'espace euclidien est définie par la forme quadratique $(d' s)^2 \equiv \equiv r^2 \cos^2 \varphi \, (d' \lambda)^2 + r^2 \, (d' \varphi)^2 + (d' z)^2$, où $d' s$ est la distance de deux points infiniment voisins pris au même instant t ($d' t \equiv 0$) et dont les différences de longitude, de latitude et d'altitude sont respectivement $d' \lambda$, $d' \varphi$ et $d' z$. Le déterminant γ de cette forme quadratique est donné par $\gamma \equiv r^4 \cos^2 \varphi$. Afin de simplifier les écritures, il est utile de poser

$$x^1 \equiv \lambda, \; x^2 \equiv \varphi, \; x^3 \equiv z. \tag{2.1}$$

Ensuite, soit $\boldsymbol{A}$ un vecteur quelconque. Désignons par A^1, A^2, A^3 ses composantes contravariantes[1], par A_1, A_2, A_3 ses composantes covariantes[1] et par A_x, A_y, A_z ses composantes coordonnées dans le trièdre $x\ y\ z$ trirectangle et dextrogyre des météorologistes (l'axe x tangent au parallèle, orienté positivement vers l'E et l'axe y tangent au méridien, orienté positivement vers le N). On sait que

$$A_1 = r^2 \cos^2 \varphi, \; A^1 = r \cos \varphi \, A_x, \quad A_2 = r^2 \, A^2 = r \, A_y, \quad A_3 = A^3 = A_z, \tag{2.2}$$

où $r^2 \cos^2 \varphi$, r^2 et 1 sont les coefficients de la métrique en variables λ, φ, z, t.

Lorsque $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{v}$, on $a : A^1 \equiv v^1 \equiv \dot{\lambda}$, $A^2 \equiv v^2 \equiv \dot{\varphi}$, $A^3 \equiv v^3 \equiv \dot{z}$ et $A_x \equiv v_x \equiv r \cos \varphi \, \dot{\lambda}$, $A_y \equiv v_y \equiv r \, \dot{\varphi}$, $A_z \equiv v_z \equiv \dot{z}$, où le point indique qu'il faut prendre la dérivée individuelle d/dt du symbole qu'il surmonte par rapport au temps t.

Lorsque $\boldsymbol{A} \equiv \nabla \psi =$ ascendant d'un scalaire $\psi \, (\lambda, \varphi, z)$, on a :

$$A_1 \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \; A_2 \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \; A_3 \equiv \frac{\partial \psi}{\partial z} \text{ et } A_x \equiv \frac{1}{r \cos \varphi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \; A_y \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \; A_z \equiv \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

[1] Pour un exposé général des applications du calcul tensoriel à la mécanique cf [*1*]; on trouvera des exposés plus élémentaires dans [*2*] et [*3*]. Rappelons que lorsqu'on effectue un changement de variables sur les x^i ($i = 1, 2, 3$) les composantes contravariantes A^i varient comme les composantes dx^i d'un déplacement quelconque ds et les composantes covariantes A_i comme les composantes $\partial \psi / \partial x^i$ de l'ascendant $\Delta \psi$ d'un scalaire quelconque $\psi \, (x^1, x^2, x^3)$.

Enfin, soit

$$z = z_0 (\lambda, \varphi) \tag{2.3}$$

l'équation de la surface du globe. En admettant que celle-ci se comporte comme une paroi rigide, les composantes $v_x{}^0$, $v_y{}^0$, $v_z{}^0$ de la vitesse $\boldsymbol{v}^\circ$ de l'air à la surface du globe satisfont à la condition

$$v_z{}^0 = \dot{\lambda}_0 \frac{\partial z_0}{\partial \lambda} + \dot{\varphi}_0 \cdot \frac{\partial z_0}{\partial \varphi} \equiv \boldsymbol{v}_h{}^0 \cdot \nabla_h z_0 , \tag{2.4}$$

que l'on obtient en dérivant totalement l'équation (2.3) par rapport au temps t. L'indice $_0$ sert à rappeler qu'il s'agit de la valeur à la surface du globe du symbole qui en est affecté et l'indice h, de la composante horizontale de la grandeur vectorielle qui en est affectée.

L'hypothèse de la paroi rigide implique que l'atmosphère n'effectue aucun travail sur la surface de la terre. En réalité, il n'en est pas ainsi. On sait, en effet, que l'atmosphère effectue un travail sur le sol (érosion due au vent) et aussi sur la surface des océans provoquant et entretenant ainsi les courants en surface et les vagues (ondes de gravité). Cette hypothèse est toutefois justifiée par le fait que le travail effectué par l'atmosphère sur la terre ne représente qu'une quantité d'énergie très minime par rapport aux autres quantités d'énergie qui interviennent dans l'économie énergétique de l'atmosphère.

3. — Introduisons maintenant la pression atmosphérique p,

$$p = p (\lambda, \varphi, z, t). \tag{3.1}$$

Comme, en tout point de l'espace occupé par l'atmosphère, on a $\dfrac{\partial p}{\partial z} \neq 0$, on peut résoudre l'égalité (3.1) par rapport à z ; d'où

$$z = z (\lambda, \varphi, p, t). \tag{3.2}$$

Au lieu d'utiliser les variables eulériennes λ, φ, z et t, on peut donc tout aussi bien utiliser les variables eulériennes généralisées λ, φ, p et t. C'est ce que font habituellement les météorologistes. De même, posons

$$x'^1 \equiv \lambda, \; x'^2 \equiv \varphi, \; x'^3 \equiv p. \tag{3.3}$$

En utilisant les notations (2.1) et (3. 3), le changement de variables des météorologistes s'écrit :

$$x'^1 = x^1, \; x'^2 = x^2, \; x'^3 = p (x^1, x^2, x^3, t), \tag{3.1 a}$$

ou encore,

$$x^1 = x'^1, \; x^2 = x'^2, \; x^3 = z (x'^1, x'^2, x'^3, t). \tag{3.2 a}$$

La métrique de l'espace euclidien $(d's)^2$ en variables λ, φ, p et t s'exprime à l'aide d'une forme quadratique en $d'\lambda$, $d'\varphi$, et $d'p$ plus compliquée

que celle rappelée plus haut en $d'\lambda$, $d'\varphi$ et $d'z$. Il est toutefois aisé de montrer que le déterminant γ' de cette nouvelle forme quadratique est donné par

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 \gamma' = \gamma = r^4 \cos^2 \varphi,$$

où $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2$ représente le carré du jacobien des nouvelles variables x'^i par rapport aux anciennes variables x^j $(i, j = 1, 2, 3)$.

Afin d'éviter tout malentendu, nous désignerons par $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial t}$ les dérivées partielles par rapport aux variables indépendantes x^i et t et par $\frac{\delta}{\delta x'^i}, \frac{\delta}{\delta t}$ les dérivées partielles par rapport aux variables indépendantes x'^i et t.

Exprimons maintenant les composantes covariantes A'_i et contravariantes A'^i du vecteur $\boldsymbol{A}$ en les nouvelles variables x'^i en fonction des composantes correspondantes A_j et A^j en les anciennes variables x^j. On sait [*1*, *2*, *3*] que, (3. 1 a et 2 a),

$$A'^i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j, \text{ d'où: } A'^1 = A^1,\ A'^2 = A^2,\ A'^3 = \boldsymbol{A} \cdot \nabla p \equiv \sum_{i=1}^{3} A^i \frac{\partial p}{\partial x^i}, \tag{3.4}$$

et

$$A'_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j, \text{ d'où: } A'_1 = A_1 + A_3 \frac{\delta z}{\delta \lambda},$$

$$A'_2 = A_2 + A_3 \frac{\delta z}{\delta \varphi},\ A'_3 = A_3 \frac{\delta z}{\delta p},$$

ou encore,

$$A^i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} A'^j, \text{ d'où: } A^1 = A'^1,\ A^2 = A'^2,$$

$$A^3 = \boldsymbol{A} \cdot \nabla z \equiv \sum_{i=1}^{3} A'^i \frac{\delta z}{\delta x'^i} = A_z, \tag{3.4'}$$

et

$$A_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} A'_j, \text{ d'où: } A_1 = A'_1 + A'_3 \frac{\partial p}{\partial \lambda},$$

$$A_2 = A'_2 + A'_3 \frac{\partial p}{\partial \varphi},\ A_3 = A'_3 \frac{\partial p}{\partial z} = A_z.$$

En remplaçant dans les relations ci-dessus les composantes covariantes A_i et A'_i par les composantes covariantes $\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$ et $\frac{\delta \psi}{\delta x'^i}$ du vecteur $\nabla \psi$, on retrouve les formules classiques qui expriment les dérivées d'une fonction ψ

par rapport aux nouvelles variables x'^i en fonction des dérivées de la même fonction par rapport aux anciennes variables x^i et vice versa.

Remarque. Reportons-nous à l'identité (1.4) et montrons qu'elle est bien vérifiée en variables λ, φ, p et t. Auparavant faisons observer que

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi=\sum_{i=1}^{3}A^i\frac{\partial\psi}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^{3}A'^i\frac{\delta\psi}{\delta x'^i}, \tag{3.5}$$

quel que soit le scalaire ψ. Il est aisé de démontrer ces relations par un calcul direct basé sur les relations de variance rappelées ci-dessus (voir (3.4) et (3.4')). En posant successivement $\psi\equiv p$ et $\psi\equiv z$, on retrouve les expressions de $\boldsymbol{A}\cdot\nabla p$ et $\boldsymbol{A}\cdot\nabla z$, données en (3.4) et (3.4').

Cela étant, remarquons qu'en variables λ, φ, z et t, le géopotentiel ϕ est indépendant de t, tandis qu'en variables λ, φ, p et t, on a : $\phi=\phi(\lambda,\varphi,p,t)$ et par suite, (3.5) et (3.4),

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\phi=\dot\lambda\frac{\delta\phi}{\delta\lambda}+\dot\varphi\frac{\delta\phi}{\delta\varphi}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla p)\frac{\delta\phi}{\delta p}=\dot\lambda\frac{\delta\phi}{\delta\lambda}+\dot\varphi\frac{\delta\phi}{\delta\varphi}+\dot p\frac{\delta\phi}{\delta p}+\frac{\delta\phi}{\delta t}\equiv\frac{d\phi}{dt},$$

compte tenu des identités

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla p\equiv\frac{dp}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}\left(\text{avec }\dot p\equiv\frac{dp}{dt}\right)$$

et

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\delta\phi}{\delta t}+\frac{\delta\phi}{\delta p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}\equiv 0$$

et aussi de la définition du symbole d/dt. Ce calcul élémentaire qui conduit à la vérification de l'identité (1.4) fait bien apparaître le mécanisme du changement de variables envisagé [voir (3.1a) ou (3.2a)].

4. — Il faut maintenant introduire l'opérateur de la divergence div $\boldsymbol{A}$ d'un vecteur $\boldsymbol{A}$ et l'élément de volume d'τ de l'espace à trois dimensions, occupé par l'atmosphère.

Par définition, on a [*1, 2, 3*] :

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\sqrt{\gamma}A^i)}{\partial x^i}=\frac{1}{\sqrt{\gamma'}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\delta(\sqrt{\gamma'}\,A'^i)}{\delta x'^i},$$

d'où

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A^1}{\partial\lambda}+\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{\partial(A^2\cos\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial(A^3r^2)}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{\partial(A_y\cos\varphi)}{\partial y}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial(A_z r^2)}{\partial z}, \tag{4.1}$$

et

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{|z_p|\, r^2} \cdot \frac{\delta}{\delta \lambda} (|z_p|\, r^2 A'^1) + \frac{1}{|z_p|\, r^2 \cos\varphi} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi} (|z_p|\, r^2 A'^2 \cos\varphi)$$

$$+ \frac{1}{|z_p|\, r^2} \cdot \frac{\delta}{\delta p} (|z_p|\, r^2 A'^3) = \frac{1}{|z_p|\, r} \cdot \frac{\delta}{\delta x} (|z_p|\, r A_x)$$

$$+ \frac{1}{|z_p|\, r \cos\varphi} \cdot \frac{\delta}{\delta y} (|z_p|\, r A_y \cos\varphi) + \frac{1}{|z_p|\, r^2} \cdot \frac{\delta}{\delta p} (|z_p|\, r^2 \boldsymbol{A} \cdot \nabla p), \qquad (4.2)$$

où $|z_p|$ représente la valeur absolue de $z_p \equiv \dfrac{\delta z}{\delta p}$ et où nous avons posé

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{1}{r \cos\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\delta}{\delta x} \equiv \frac{1}{r \cos\varphi} \cdot \frac{\delta}{\delta \lambda}, \quad \frac{\delta}{\delta y} \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\delta \varphi}.$$

Rappelons que, dans la première expression de div $\boldsymbol{A}$, r est une variable indépendante, tandis que dans la seconde, r est une fonction de λ, φ, p et t. La divergence du vecteur $\boldsymbol{A}$ dépend de la convergence des méridiens sur la sphère, de la divergence des rayons vecteurs issus du centre de la terre et de la manière dont les composantes zonale A_x, méridienne A_y et verticale A_z du vecteur $\boldsymbol{A}$ varient respectivement le long des parallèles, des méridiens et des verticales.

Remarquons que, dans (4.2), on peut remplacer $|z_p|$ par $z_p = \dfrac{\delta z}{\delta p}$ sans changer le signe de l'expression de div $\boldsymbol{A}$.

Désignons par $\boldsymbol{A}_h$ la composante horizontale du vecteur $\boldsymbol{A}$ et par A_{is} sa composante isobare, c'est-à-dire sa composante suivant le plan tangent à la surface isobare qui passe par le point d'application du vecteur $\boldsymbol{A}$. En variables x^1, x^2, x^3 ou λ, φ, z, les composantes contravariantes de $\boldsymbol{A}_h$ sont $(A^1, A^2, 0)$ et en variables x'^1, x'^2, x'^3 ou λ, φ, p, les composantes contravariantes de $\boldsymbol{A}_{is}$ sont $(A'^1, A'^2, 0)$. On a donc, par définition,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_h = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{\partial (A_y \cos\varphi)}{\partial y} = \frac{1}{z_p} \cdot \frac{\delta}{\delta x} (z_p\, r\, A_x) + \frac{1}{z_p\, r \cos\varphi} \cdot$$

$$\cdot \frac{\delta}{\delta y} (z_p\, r\, A_y \cos\varphi) + \frac{1}{z_p\, r^2} \cdot \frac{\delta}{\delta p} (z_p\, r^2\, \boldsymbol{A}_h \cdot \nabla_h p) \qquad (4.3)$$

et

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_{is} = \frac{1}{z_p\, r} \cdot \frac{\delta}{\delta x} (z_p\, r\, A_x) + \frac{1}{z_p\, r \cos\varphi} \cdot \frac{\delta}{\delta y} (z_p\, r\, A_y \cos\varphi)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{\partial (A_y \cos\varphi)}{\partial y} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (r^2\, \boldsymbol{A}_h \cdot \nabla_{is} z), \qquad (4.4)$$

où l'on a posé

$$\boldsymbol{A}_h \cdot \nabla_h p = A^1 \frac{\partial p}{\partial \lambda} + A^2 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \equiv A_x \frac{\partial p}{\partial x} + A_y \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial z} \boldsymbol{A}_h \cdot \nabla_{is} z,$$

et

$$\boldsymbol{A}_h \cdot \nabla_{is} z = A'^1 \frac{\delta z}{\delta \lambda} + A'^2 \frac{\delta z}{\delta \varphi} \equiv A_x \frac{\delta z}{\delta x} + A_y \frac{\delta z}{\delta y} = -z_p\, \boldsymbol{A}_h \cdot \nabla_h p.$$

Ainsi, dans l'espace à trois dimensions occupé par l'atmosphère, div A_h est la divergence du vecteur A_h, composante horizontale du vecteur quelconque A. De plus, div A_h est aussi la divergence $\mathrm{div}_h\, A_h$ dans l'espace à deux dimensions, que constitue la sphère de rayon r (laquelle est supposée être la surface équigéopotentielle de cote z, $r = a + z$), du vecteur horizontal A_h (vecteur de l'espace à deux dimensions considéré). On peut donc écrire $\mathrm{div}\, A_h = \mathrm{div}_h\, A_h$. Cette dernière notation est souvent utilisée en météorologie dynamique. De même, dans l'espace à trois dimensions, div A_{is} est la divergence du vecteur A_{is}, composante isobare du vecteur quelconque A. Mais, div A_{is} n'est pas la divergence $\mathrm{div}_{is}\, A_{is}$ du vecteur isobare A_{is} sur la surface isobare tangente à A_{is} (divergence sur cette surface du vecteur A_{is} de l'espace à deux dimensions que constitue la surface isobare), et par conséquent, $\mathrm{div}\, A_{is} \neq \mathrm{div}_{is}\, A_{is}$. Néanmoins, les météorologistes écrivent souvent $\mathrm{div}_{is}\, A_h$ ou $\mathrm{div}_p\, A_h$ (l'indice p ayant la même signification que l'indice *is* mis pour *isobare*) au lieu de div A_{is}, seule notation susceptible d'éviter tout malentendu. Sans doute, dans l'atmosphère, les surfaces isobares sont-elles quasi horizontales et par suite, quasi sphériques et les composantes A_h et A_{is} sont-elles souvent pratiquement égales, mais il n'en reste pas moins vrai qu'il est dangereux d'utiliser la notation $\mathrm{div}_{is}\, A_h$ ou $\mathrm{div}_p\, A_h$ pour désigner div A_{is} définie en (4.4). A cet égard, il convient de faire remarquer que si apparemment div A_{is} ne dépend que des composantes horizontales A_x et A_y du vecteur A l'opérateur div A_{is} intéresse néanmoins la composante isobare A_{is} de A et non sa composante horizontale A_h, car, dans (4.4), les dérivées $\dfrac{\delta}{\delta x}$ et $\dfrac{\delta}{\delta y}$ effectuées le long des directions horizontales x et y, le sont dans la surface isobare et non dans la surface géopotentielle (surface horizontale) passant par le point considéré.

Rappelons encore les identités

$$\mathrm{div}\, \psi A = A \cdot \nabla \psi + \psi\, \mathrm{div}\, A, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{div}\, \psi A_h = A_h \cdot \nabla_h \psi + \psi\, \mathrm{div}\, A_h \text{ et } \mathrm{div}\, \psi A_{is} = A_h \cdot \nabla_{is} \psi + \psi\, \mathrm{div}\, A_{is}, \tag{4.6}$$

où ψ est un scalaire quelconque et où $\nabla_h \psi$ désigne l'ascendant horizontal de ψ, c'est-à-dire le vecteur défini par les composantes covariantes $\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi}, 0\right)$ en variables λ, φ, et z et $\nabla_{is} \psi$ l'ascendant isobare de ψ, c'est-à-dire le vecteur défini par les composantes covariantes $\left(\dfrac{\delta \psi}{\delta \lambda}, \dfrac{\delta \psi}{\delta \varphi}, 0\right)$ en variables λ, φ et p.

Quant à l'élément de volume $d'\tau$, il est défini par [*1, 2, 3*]

$$d'\tau = \sqrt{\gamma}\, d'x^1\, d'x^2\, d'x^3 = \sqrt{\gamma'}\, d'x'^1\, d'x'^2\, d'x'^3,$$

d'où

$$d'\tau = r^2 \cos\varphi\, d'\lambda\, d'\varphi\, d'z = |z_p|\, r^2 \cos\varphi\, d'\lambda\, d'\varphi\, d'p, \tag{4.7}$$

avec, rappelons-le, $d't = 0$.

Enfin, grâce aux formules (4.1) et (4.2), il est possible d'écrire l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0 \tag{4.8}$$

en variables λ, φ, z et t et en variables λ, φ, p et t. En ces dernières variables, l'expression de l'équation de continuité est assez compliquée à moins que l'on introduise l'hypothèse (1.6) (voir plus loin l'équation (5.10)).

5.— Introduisons maintenant les hypothèses (1.5) et (1.6) dans (4.2) et (4.7) ; ceci revient à poser dans ces formules

$$r \equiv a \text{ et } |z_p| \equiv \frac{\alpha}{g}, \tag{5.1}$$

où $\alpha = \dfrac{1}{\rho}$ représente le volume spécifique de l'air. Il est bon de noter que poser $r = a$ dans (4.2) revient à négliger les termes $\dfrac{2A_z}{r}$ et $-\dfrac{A_h \cdot \nabla_{is} z}{r}$ de l'expression de la divergence du vecteur $\boldsymbol{A}$ en variables λ, φ, p. Cette simplification est certainement justifiée dans le cas de mouvements atmosphériques de grande échelle. De plus, nous ferons abstraction de la variabilité de g dans l'espace.

Prenons d'abord les formules (4.7), on trouve

$$d'\tau = \frac{\alpha a^2}{g} \cos\varphi \, d'\lambda \, d'\varphi \, d'p \tag{5.2}$$

et par suite,

$$d'm = \rho \, d'\tau = \frac{a^2}{g} \cos\varphi \, d'\lambda \, d'\varphi \, d'p, \tag{5.3}$$

$d'm$ étant l'élément de masse contenu dans l'élément de volume $d'\tau$. Ensuite, reprenons les formules (4.2) et (4.4) ; en y substituant (5.1), on obtient

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \rho \left(\frac{\delta(\alpha A_x)}{\delta x} + \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\delta(\alpha A_y \cos\varphi)}{\delta y} + \frac{\delta(\alpha \boldsymbol{A} \cdot \nabla p)}{\delta p} \right) \tag{5.4}$$

et

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_{is} = \rho \left(\frac{\delta(\alpha A_x)}{\delta x} + \frac{1}{\cos\varphi} \frac{(\delta \alpha A_y \cos\varphi)}{\delta y} \right). \tag{5.5}$$

où, (5.1),

$$\frac{\delta}{\delta x} \equiv \frac{1}{a\cos\varphi} \cdot \frac{\delta}{\delta\lambda} \text{ et } \frac{\delta}{\delta y} \equiv \frac{1}{a} \cdot \frac{\delta}{\delta\varphi}.$$

Nous sommes ainsi amené à introduire l'opérateur

$$\operatorname{div}_{is} \boldsymbol{A} \equiv \frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\delta (A_y \cos\varphi)}{\delta y}, \tag{5.6}$$

qui se réduirait à l'opérateur de la divergence sur la sphère de rayon a du vecteur de composantes coordonnées $(A_x, A_y, 0)$, si les surfaces isobares étaient des sphères concentriques. Grâce à cet opérateur, on a

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \rho \operatorname{div}_{is} \alpha \boldsymbol{A} + \rho \dfrac{\delta (\alpha \boldsymbol{A} \cdot \nabla p)}{\delta p}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{A}_{is} = \rho \operatorname{div}_{is} \alpha \boldsymbol{A}, \end{cases} \tag{5.7}$$

et par suite,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \rho \boldsymbol{A} = \rho \operatorname{div}_{is} \boldsymbol{A} + \rho \dfrac{\delta (\boldsymbol{A} \cdot \nabla p)}{\delta p}, \\ \operatorname{div} \rho \boldsymbol{A}_{is} = \rho \operatorname{div}_{is} \boldsymbol{A}. \end{cases} \tag{5.8}$$

Reportons-nous maintenant à l'équation de continuité (4.8) et substituons-y les relations (5.8). Grâce à l'identité $\boldsymbol{v} \cdot \nabla p = \dfrac{dp}{dt} - \dfrac{\partial p}{\partial t}$, on trouve immédiatement

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_{is} \boldsymbol{v} + \frac{\delta (\omega - p_t)}{\delta p} = 0, \tag{5.9}$$

en écrivant comme d'habitude $\omega \equiv \dfrac{dp}{dt} \equiv \dot{p}$ et en posant $p_t \equiv \dfrac{\partial p}{\partial t}$.

Puis, en remarquant que

$$\frac{\delta p_t}{\delta p} = \frac{\delta z}{\delta p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

compte tenu de l'équation de l'hydrostatique suivant la verticale, on voit que l'équation de continuité (4.8) ou (5.9) prend l'expression simple

$$\operatorname{div}_{is} \boldsymbol{v} + \frac{\delta \omega}{\delta p} = 0. \tag{5.10}$$

Telle est bien la forme classique de l'équation de continuité, en variables λ, φ, p et t. Elle exprime que, dans l'espace (λ, φ, p), un fluide parfait quelconque, animé de mouvements quasi statiques, se comporte comme un fluide incompressible.

Enfin, notons l'identité

$$\operatorname{div}_{is} \psi \boldsymbol{A} = \psi \operatorname{div}_{is} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}_h \cdot \nabla_{is} \psi, \tag{5.11}$$

ψ étant un scalaire quelconque.

6.— Cela étant, retournons aux bilans (1.1) et (1.2) et proposons-nous d'y introduire les hypothèses (1.5) et (1.6). Remarquons d'abord que [4]

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\phi=\rho\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla_{is}\phi+\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla p)\left(\alpha+\frac{\delta\phi}{\delta p}\right). \tag{6.1}$$

où

$$\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla_{is}\phi\equiv\dot{\lambda}\,\frac{\delta\phi}{\delta\lambda}+\dot{\varphi}\,\frac{\delta\phi}{\delta\varphi}\equiv v_x\frac{\delta\phi}{\delta x}+v_y\frac{\delta\phi}{\delta y}$$

et où

$$\frac{\delta\phi}{\delta p}+\alpha=0 \tag{6.2}$$

est l'équation de l'hydrostatique suivant la verticale en variable p.

Il en résulte les formes approchées [4]

$$\begin{cases}\rho\dfrac{dk}{dt}+\rho\,\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla_{is}\phi+\rho\,D=0,\\ \rho\dfrac{d\,(e+\phi)}{dt}+\operatorname{div}p\boldsymbol{v}-\rho\,\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla_{is}\phi-\rho\,(\Delta+Q)=0,\end{cases} \tag{6.3}$$

des bilans énergétiques (1.1) et (1.2).

Remplaçons, dans (6.3), la dérivée individuelle par rapport au temps $\dfrac{d}{dt}\equiv\dfrac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla_h+v_z\dfrac{\partial}{\partial z}$ par son expression en variables λ, φ, p et t.

$$\frac{d}{dt}\equiv\frac{\delta}{\delta t}+\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla_{is}+\omega\frac{\delta}{\delta p}, \tag{6.4}$$

on trouve immédiatement que

$$\begin{cases}\rho\dfrac{\delta k}{\delta t}+\rho\,\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla_{is}(k+\phi)+\rho\,\omega\dfrac{\delta k}{\delta p}+\rho\,D=0,\\ \rho\dfrac{\delta\,(e+\phi)}{\delta t}+\rho\,\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla_{is}e+\rho\,\omega\dfrac{\delta\,(e+\phi)}{\delta p}+\operatorname{div}p\boldsymbol{v}-\rho\,(\Delta+Q)=0.\end{cases}$$

Puis, en substituant (5.10) et (6.2) dans les bilans approchés ci-dessus, on obtient

$$\boxed{\frac{\delta k}{\delta t}+\operatorname{div}_{is}(k+\phi)\,\boldsymbol{v}+\frac{\delta\,(k+\phi)\,\omega}{\delta p}+\alpha\omega+D=0} \tag{6.5}$$

et

$$\frac{\delta\,(e+\phi)}{\delta t}+\operatorname{div}_{is}e\,\boldsymbol{v}+\frac{\delta\,(e\,\omega)}{\delta p}+\alpha\operatorname{div}p\boldsymbol{v}-\alpha\omega-\Delta-Q=0,$$

où, (5.7),

$$\operatorname{div} p\boldsymbol{v} = \rho \operatorname{div}_{is}(\alpha p \boldsymbol{v}) + \rho \frac{\delta[\alpha p(\omega - p_t)]}{\delta p}$$

et, par suite,

$$\boxed{\frac{\delta(e+\phi)}{\delta t} + \operatorname{div}_{is} h\boldsymbol{v} + \frac{\delta}{\delta p}\left(h\omega - \alpha p p_t\right) - \alpha\omega - \Delta - Q = 0,} \tag{6.6}$$

où $h = e + p\alpha$ représente l'enthalpie spécifique de l'air.

Ensuite, intégrons les bilans approchés (6.5) et (6.6) pour p, depuis $p=0$ jusqu'à $p = p_0$ pression atmosphérique à la surface du globe d'équation (2.3) ; on trouve

$$\frac{\delta}{\delta t}\int_0^{p_0} k\, d'p + \operatorname{div}_{is}\int_0^{p_0}(k+\phi)\boldsymbol{v}\, d'p + \int_0^{p_0}(\alpha\omega + D)\, d'p -$$

$$- k_0 \cdot \frac{\partial p_0}{\partial t} - (k_0+\phi_0)\boldsymbol{v}_h{}^0 \cdot \nabla_h p_0 + (k_0+\phi_0)\omega_0 = 0 \tag{6.7}$$

et

$$\frac{\delta}{\delta t}\int_0^{p_0}(e+\phi)\, d'p + \operatorname{div}_{is}\int_0^{p_0} h\boldsymbol{v}\, d'p - \int_0^{p_0}(\alpha\omega + \Delta + Q)\, d'p -$$

$$- (e_0+\phi_0)\frac{\partial p_0}{\partial t} - h_0 \boldsymbol{v}_h{}^0 \cdot \nabla_h p_0 + h_0\omega_0 - \alpha_0 p_0 \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0 = 0, \tag{6.8}$$

où

$$p_0 = p_0(\lambda, \varphi, t) = p(\lambda, \varphi, z_0, t),$$

z_0 étant la cote de la surface du globe d'équation (2.3). On a, par définition,

$$\omega_0 \equiv \left(\frac{dp}{dt}\right)_0 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 v_x{}^0 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 v_y{}^0 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_0 v_z{}^0 \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0 + \boldsymbol{v}^0 . (\nabla p)_0$$

et

$$\nabla_h p_0 = (\nabla_h p)_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_0 \nabla_h z_0,$$

d'où

$$\omega_0 - \frac{\partial p_0}{\partial t} - \boldsymbol{v}_h^0 \cdot \nabla_h p_0 \equiv \omega_0 - \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0 - \boldsymbol{v}_h^0 \cdot (\nabla_h p)_0 - \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_0 \boldsymbol{v}_h^0 \cdot \nabla_h z_0 = \omega_0 - \left(\frac{dp}{dt}\right)_0 \equiv 0, \tag{6.9}$$

en vertu de la condition (2.4), de la relation évidente $\frac{\partial p_0}{\partial t} = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0$ et de la définition de ω_0 rappelée ci-dessus. Ainsi, le bilan approché (6.7) se réduit à

$$\frac{\delta}{\delta t}\int_0^{p_0} k\,d'p + \mathrm{div}_{is}\int_0^{p_0} (k+\phi)\,\boldsymbol{v}\,d'p + \int_0^{p_0} (\alpha\omega + D)\,d'p + g z_0 \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0 = 0 \tag{6.10}$$

compte tenu de $\phi_0 = g z_0$ et de $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0 = \frac{\partial p_0}{\partial t}$.

On montrerait de même que

$$\frac{\delta}{\delta t}\int_0^{p_0} (e+\phi)\,d'p + \mathrm{div}_{is}\int_0^{p_0} h\boldsymbol{v}\,d'p - \int_0^{p_0} (\alpha\omega + \Delta + Q)\,d'p - g z_0 \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0 = 0. \tag{6.11}$$

Ayant noté que tous les termes des bilans (6.10) et (6.11) ne dépendent plus de la variable p, multiplions-les par $\frac{d'x\,d'y}{g} = \frac{a^2\cos\varphi}{g}\,d'\lambda\,d'\varphi$ et intégrons-les pour λ, depuis $\lambda = 0$ jusque $\lambda = 2\pi$ et pour φ, de $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ jusque $\varphi = +\frac{\pi}{2}$; on trouve, en se reportant à la définition (5.6) de l'opérateur $\mathrm{div}_{is}\,\boldsymbol{A}$, le vecteur $\boldsymbol{A}$ ne dépendant plus ici de p, que

$$\frac{\delta}{\delta t}\int_{\mathrm{atm}}\!\!\int\!\!\int k\,d'm + \iint z_0 \frac{\partial p_0}{\partial t}\,d'x\,d'y = -\int_{\mathrm{atm}}\!\!\int\!\!\int (\alpha\omega + D)\,d'm, \tag{6.12}$$

$$\frac{\delta}{\delta t}\int_{\mathrm{atm}}\!\!\int\!\!\int (e+\phi)\,d'm - \iint z_0 \frac{\partial p_0}{\partial t}\,d'x\,d'y = \int_{\mathrm{atm}}\!\!\int\!\!\int (\alpha\omega + \Delta + Q)\,d'm, \tag{6.13}$$

où représente une intégration étendue à la sphère de rayon a et où, rappelons-le, on a $d'm = \frac{a^2}{g} \cos\varphi \, d'\lambda \, d'\varphi \, d'p$. En additionnant membre à membre les bilans (6.12) et (6.13), on retrouve le bilan classique de l'énergie totale [4].

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\text{atm}} \int \int (e + \phi + k) \, d'm = \int_{\text{atm}} \int \int (\Delta - D + Q) \, d'm. \qquad (6.14)$$

Comme, dans les bilans (6.12), (6.13) et (6.14), l'opérateur de la dérivée partielle $\frac{\delta}{\delta t}$ par rapport au temps t en variables λ, φ, p et t s'applique à l'atmosphère prise dans son entièreté, on peut remplacer cette dériveé partielle par la dérivée totale $\frac{d}{dt}$, prise en suivant le mouvement de l'air par rapport à la terre et aussi, par conséquent, par la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t}$ par rapport au temps t en variable λ, φ, z et t.

Il est clair que la contribution du terme $\iint z_0 \frac{\partial p_0}{\partial t} d'x \, d'y$ aux bilans énergétiques (6.12) et (6.13) est négligeable, car $z_0 > 0$, $\frac{\partial p_0}{\partial t} \lessgtr 0$; de plus, la variabilité de z_0 en fonction de λ et φ est faible en dehors des régions montagneuses et les variations locales $\frac{\partial p_0}{\partial t}$ de la pression p_0 à la surface du globe ont tendance à se compenser. C'est pourquoi le terme en $\frac{\partial p_0}{\partial t}$ est toujours négligé dans les bilans (6.12) et (6.13).

7.— Le bilan énergétique (1.3) peut aussi s'écrire

$$\rho \frac{dh}{dt} = \omega + \rho (Q + \Delta), \qquad (7.1)$$

où $h = e + p\alpha$, h étant l'enthalpie spécifique de l'air. En opérant sur ce bilan comme il a été opéré sur le bilan (1.2) au paragraphe 6, on trouve de même que, (6.4) et (5.10),

$$\frac{\delta h}{\delta t} + \text{div}_{is} \, h\boldsymbol{v} + \frac{\delta h \omega}{\delta p} = \alpha\omega + Q + \Delta \qquad (7.2)$$

et par suite, en vertu de (6.9),

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_0^{p_0} h \, d'p + \text{div}_{is} \int_0^{p_0} h\boldsymbol{v} \, d'p = \int_0^{p_0} (\alpha\omega + Q + \Delta) \, d'p,$$

d'où finalement, la forme globale du bilan (7.1),

$$\frac{\delta}{\delta t}\int\int\int_{\text{atm}} h\, d'm = \int\int\int_{\text{atm}} (\alpha\omega + Q + \Delta)\, d'm. \tag{7.3}$$

En comparant les bilans (6.13) et (7.3) et en négligeant dans (6.13) le terme en $\frac{\partial p_0}{\partial t}$, on trouve que

$$\frac{\delta}{\delta t}\int\int\int_{\text{atm}} h\, d'm \cong \frac{\delta}{\delta t}\int\int\int_{\text{atm}} (e + \phi)\, d'm. \tag{7.4}$$

dans le cas de mouvements quasi statiques. Faisons observer que l'égalité approchée (7.4) a été établie ici sans introduire l'hypothèse du gaz parfait au point de vue de la thermodynamique.

Références

1. Brillouin, L.: Les tenseurs en mécanique et en élasticité, 370 p. Paris: Masson et Cie. 1949.
2. Defrise, P.: Le calcul tensoriel en météorologie. Inst. Roy. Météor. Belgique, Publ. sér. B, No. 30 (1960).
3. Van Mieghem, J., et A. Vandenplas: Les équations de la dynamique atmosphérique en coordonnées généralisées. Inst. Roy. Météor. Belgique, Mém. XLI (1950).
4. Van Mieghem, J.: Les bilans énergétiques et l'hypothèse quasi statique. J. Méc. Phys. Atm. IIe sér., No. 5, 1—6 (1960).

551.511.3:551.509.317:551.509.22

(Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien)

Theorie der räumlichen und zeitlichen Mittelbildung einer beliebigen Feldfunktion und ihre Anwendung in der Meteorologie

Von

Helmut Pichler

Mit 16 Textabbildungen

Zusammenfassung. Durch Untersuchung des Zusammenhanges zwischen dem Zeit- und dem Raummittelfeld einer beliebigen Feldfunktion wurde folgende Beziehung gefunden: Existiert zwischen dem Zeit- und Raummittel einer Feldfunktion ein Äquivalenzprinzip, so genügt diese Funktion einer homogenen Wellengleichung mit der Geschwindigkeit $c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ der Welle (im zweidimensionalen Fall). Δs und Δt sind hiebei die Raum- bzw. Zeitinkremente der räumlichen bzw. zeitlichen Mittelung der Feldfunktion. Diese Feststellung gilt auch umgekehrt: falls eine Raum-Zeitfunktion einer Wellengleichung mit $c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ genügt, so gilt für das Raum- und Zeitmittel der Funktion mit Δs und Δt als die dazugehörigen Inkremente ein Äquivalenzprinzip. Ist die Geschwindigkeit der Welle $c \neq \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, so besteht zwischen dem Raum- und Zeitmittel einer Feldfunktion eine allgemeinere lineare Beziehung, die genau bestimmbar ist.

Da H. Reuter für das Geopotential einer Druckfläche ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel statistisch nachweisen konnte, muß auf Grund der oben erwähnten Ergebnisse geschlossen werden, daß in der Atmosphäre Wellen- bzw. Schwingungsvorgänge (lineare Vorgänge) sehr häufig vorkommen. Es kann nachgewiesen werden, daß gewisse partikuläre Integrale der divergenzfreien Vorticitygleichung (z. B. Rossby-Lösung) gleichzeitig auch Lösungen der homogenen Wellengleichung sind. Für diese Lösungen werden die Bedingungen für ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel ausführlich diskutiert.

Weiters kann gezeigt werden, daß man mittels des Äquivalenzprinzipes die homogene Wellengleichung sehr einfach numerisch oder graphisch inte-

grieren kann. Diese Tatsache wird zur Konstruktion von Vorhersagekarten im 500 mb-Niveau verwendet. Allerdings muß bei einer solchen Integration die Geschwindigkeit des Feldes bekannt sein. Diese Geschwindigkeit wird daher entweder durch Extrapolation oder mittels der ROSSBY-Formel unter Zuhilfenahme der zonalen Windkomponenten ermittelt. Naturgemäß können aber durch eine solche Methode der Vorhersage barokline Entwicklungen nicht erfaßt werden. Ferner werden noch Vorschläge zur Verbesserung der Methode zur Vorhersage von Mittelkarten nach H. REUTER ausgearbeitet.

Summary. An investigation of the correlation between time means and space means of an arbitrary field function renders the following relationship: If the time and space means of a field function follow a principle of equivalence, this field function satisfies a homogeneous wave equation, with a wave velocity $c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ (in the two-dimensional case). Δs and Δt are the grid distance and time interval used in calculating the space and time averages of the field. The above statement may also be reversed: if a function of space and time satisfies a wave equation with $c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, the space and time means (increments Δs and Δt) follow a principle of equivalence. If the wave velocity $c \neq \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, the space and time means of the field function can be represented accurately by a linear general equation.

The existence of a principle of equivalence between space and time means of the geopotential field of a constant pressure level has been proved statistically by H. REUTER. In view of the present results, this equivalence suggests that wave processes must be rather common in the atmosphere. It can be shown that certain particular integrals of the non-divergence vorticity equation (e.g. the ROSSBY-solution) are also solutions of the homogeneous wave equation. For these solutions, the conditions of a principle of equivalence of space and time means are discussed in detail.

Further, it can be shown that, by means of the principle of equivalence, the homogeneous wave equation may easily be integrated, either numerically or graphically. These findings were utilized in constructing prognostic charts of the 500 mb level. Integration of the wave equation is only possible if the velocity of the field is known. It can be found either by extrapolation in time, or by means of the ROSSBY formula and the zonal wind component. Of course, the prognostic method described here does not cover baroclinic developments. Finally, several suggestions are made to improve H. REUTER's method of extended forecasting.

Résumé. En recherchant la connexion entre les champs des moyennes temporelles et spatiales d'une fonction de champ quelconque on a trouvé le rapport suivant : Si la moyenne temporelle et la moyenne spatiale d'une fonction de champ obéissent à un principe d'équivalence, cette fonction satisfait une équation des ondes, la vitesse de l'onde (dans le cas à deux dimensions) étant $c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ici, Δs indique la dimension du carrelage et Δt la différence du temps au calcul des moyennes spatiales et temporelles dans le champ. Cette règle est aussi reversible : si une fonction spatiale et temporelle satisfait une équation des ondes avec $c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ un principe d'équi-

valence est applicable pour les moyennes spatiales et temporelles en employant les différences Δs et Δt. Si la vitesse de l'onde $c \neq \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, une relation linéaire et plus générale existe entre la moyenne spatiale et temporelle, laquelle peut être déterminée précisément.

Comme H. REUTER pouvait prouver par la statistique un principe d'équivalence entre des moyennes spatiales et temporelles dans un champ du géopotentiel d'un niveau isobarique, il faut conclure en raison des résultats mentionnés ci-dessus que dans l'atmosphère les événements ondulatoires ou de l'oscillation (événements linéaires) sont très fréquents. On peut prouver que certaines intégrales particulières de l'équation de vorticity sans divergence (par exemple : solution de ROSSBY) sont simultanément aussi des solutions de l'équation homogène des ondes. Pour ces solutions-là les conditions pour un principe de l'équivalence entre les moyennes spatiales et temporelles sont discutées en détail.

En outre on peut montrer qu'on peut intégrer l'équation homogène des ondes bien facilement numériquement ou d'une manière graphique au moyen du principe de l'équivalence. Ce fait est appliqué pour la construction des cartes de prévision au niveau de 500 mb. Cependant il faut connaître la vitesse du champ pour une telle intégration. On trouve cette vitesse par extrapolation ou au moyen de la formule de ROSSBY en s'appuyant sur les composantes zonales du vent. Mais il faut dire que les évolutions baroclines ne peuvent pas être saisies par une telle méthode de prévision. De plus l'auteur propose des amendements de la méthode de prévision des cartes moyennes selon REUTER.

Einleitung

In der molekularen Physik wird der räumlichen und zeitlichen Mittelbildung eine große Bedeutung beigemessen. Aus der statistischen und molekularen Theorie der Wärme (u. a. A. SMEKAL [*1*]) ist bekannt, daß eine statistische Äquivalenz zwischen einer Zeitgesamtheit und einer Raumgesamtheit besteht. Bei einer bestimmten Zustandsverteilung kann an Stelle eines Zeitmittelwertes ein Raummittelwert gesetzt werden. Der Mittelwert selbst repräsentiert wiederum eine beobachtbare makroskopische physikalische Größe.

H. REUTER [*2*] konnte auf Grund seiner empirisch-statistischen Untersuchungen eine hohe Korrelation zwischen dem zeitlichen und räumlichen Mittelwert eines Geopotentialfeldes (850 mb-Niveau) nachweisen. Offenbar existiert für makroskopische Größen selbst wiederum ein Äquivalenzprinzip zwischen einem räumlichen und zeitlichen Mittel einer Feldverteilung.

Aufgabe dieser Arbeit soll es sein, die physikalischen Ursachen eines solchen Äquivalenzprinzipes einer beliebigen Feldverteilung (Raum-Zeitfunktion) zu ergründen bzw. die Bedingungen für ein solches Äquivalenzprinzip abzuleiten.

1. Theoretische Betrachtungen

In diesem Abschnitt werden die allgemeinen Voraussetzungen bzw. Grundlagen für ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel einer beliebigen Feldfunktion erarbeitet.

1.1. Allgemeine Grundlagen

Für die folgende Untersuchung soll eine beliebige Feldverteilung herangezogen werden. Es sei α eine Funktion von Raum und Zeit:

$$\alpha = \alpha\,(x, y, z, t). \tag{1}$$

Diese Raum-Zeitfunktion kann zum Zeitpunkt $t = t_0$ nach einem orthogonalen Funktionssystem entwickelt werden. Wir wollen uns dabei auf eine hinreichend genaue Näherung beschränken und daher diese Entwicklung beim N-ten Glied abbrechen:

$$\alpha\,(x, y, z, t_0) = \sum_{q=1}^{N} c_q\,\alpha_q. \tag{2}$$

Die α_q stellen die Orthogonalfunktionen dar, die Koeffizienten c_q werden durch

$$c_q = \frac{1}{B}\int_{(B)} \alpha\,\alpha_q\,dx\,dy\,dz \tag{3}$$

bestimmt.

Diesen Orthogonalfunktionen legen wir nun folgende Bedingung auf: Bei einer vorgegebenen Randbedingung sollen alle α_q der Gleichung

$$\nabla^2\,\alpha_q + a_q\,\alpha_q = 0 \tag{4}$$

mit $a_q > 0$ genügen. Demnach sind die α_q Eigenfunktionen und die a_q die dazugehörigen Eigenwerte.

Im Fall einer sphärischen Betrachtung ist:

$$\nabla_s{}^2\,\alpha_q + \alpha_q\,\alpha_q = 0 \tag{4'}$$

mit ∇_s = Nablaoperator in sphärischen Koordinaten und mit

$$a_q = \frac{q\,(q+1)}{R^2}$$

als Eigenwerte; dabei ist R der Kugelradius.

Wendet man nun auf (2) den Laplaceoperator an, so folgt mittels (4) zur Zeit $t = t_0$

$$(\nabla^2\alpha)_{t=t_0} = -\sum_{q=1}^{N} a_q\,c_q\,\alpha_q. \tag{5}$$

Sind aber die Eigenwerte a_q $(N-1)$-fach entartet, so erhält man:

$$(\nabla^2\alpha)_{t=t_0} = -a_q \sum_{q=1}^{N} c_q\,\alpha_q \tag{5'}$$

Mit R. Fjørtoft [3] definieren wir nun folgende Differentialoperation:

$$(\bar{\ }) = (\ ) + \frac{1}{a_N}\nabla^2 \tag{6}$$

Aus der Anwendung dieses Operators auf die Feldfunktion $\alpha = \alpha(x, y, z, t_0)$ zur Zeit $t = t_0$ folgt:

$$\bar{\alpha} = \alpha_{t=t_0} + \frac{1}{a_N} (\nabla^2 \alpha)_{t=t_0} \tag{6'}$$

Mittels (5) geht (6') über in:

$$\bar{\alpha} = \sum_{q=1}^{N} \left(1 - \frac{a_q}{a_N}\right) c_q \alpha_q \tag{7}$$

$\bar{\alpha}$ stellt demnach für $0 \leqq 1 - \frac{a_q}{a_N} < 1$ eine *räumliche Dämpfung* des Feldes $\alpha = \alpha(x, y, z, t_0)$ dar. Die N-te Komponente wird total gedämpft, die übrigen Komponenten im Verhältnis $\left(1 - \frac{a_q}{a_N}\right)$.

Nun können wir im Raumpunkt $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ — in Hinkunft schreiben wir zur Abkürzung $R = R_0$ — die Feldfunktion $\alpha = \alpha(x_0, y_0, z_0, t)$ auch folgendermaßen entwickeln:

$$\alpha(x_0, y_0, z_0, t) = \sum_{q=1}^{M} c_q^* \alpha_q^* \tag{8}$$

Dabei wurde die Entwicklung nach hinreichender Genauigkeit beim M-ten Glied abgebrochen. Die α_q^* stellen wieder Orthogonalfunktionen dar und die Koeffizienten c_q^* werden durch

$$c_q^* = \frac{1}{T} \int_{(T)} \alpha \alpha_q^* \, dt \tag{9}$$

bestimmt. Alle α_q^* sollen noch der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \alpha_q^*}{\partial t^2} + b_q \alpha_q^* = 0 \tag{10}$$

mit $b_q > 0$ genügen.

Für den Raumpunkt $R = R_0$ folgt daher aus (8):

$$\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\right)_{R=R_0} = -\sum_{q=1}^{M} b_q c_q^* \alpha_q^* \tag{11}$$

Wir definieren nun analog zu (6) folgende Differentialoperation:

$$\hat{(\ )} = (\ ) + \frac{1}{b_M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{12}$$

Wird diese Operation auf die Funktion $\alpha = \alpha(x_0, y_0, z_0, t)$ angewandt, so erhält man:

$$\hat{\alpha} = \alpha_{R=R_0} + \frac{1}{b_M} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\right)_{R=R_0} \tag{12'}$$

Aus (11) folgt dann:

$$\hat{\alpha} = \sum_{q=1}^{M} \left(1 - \frac{b_q}{b_M}\right) c_q^* \alpha_q^* \tag{13}$$

Demnach stellt $\hat{\alpha}$ für $0 \leqq 1 - \frac{b_q}{b_M} < 1$ eine *zeitliche Dämpfung* des Feldes $\alpha = \alpha(x_0, y_0, z_0, t)$ dar. Dabei wird die M-te Komponente total herausgefiltert, während die übrigen Komponenten im Verhältnis $\left(1 - \frac{b_q}{b_M}\right)$ gedämpft werden.

Es sind nun die Werte a_N und b_M zu bestimmen. Im zweidimensionalen Fall erhält man für den Laplaceoperator nach Übergang zu endlichen Differenzen folgenden Ausdruck:

$$\nabla^2 \alpha \approx \frac{4}{(\Delta s)^2} (\bar{\alpha} - \alpha_0) \tag{14}$$

mit $\bar{\alpha} = \frac{1}{4} (\alpha_{\mathrm{I}} + \alpha_{\mathrm{II}} + \alpha_{\mathrm{III}} + \alpha_{\mathrm{IV}})$ und Δs als Gitterdistanz (Abb. 1).

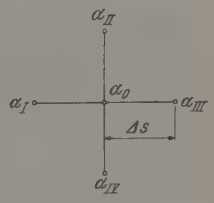

Abb. 1. Numerisches Gitternetz

Aus (6′) und (14) folgt dann:

$$a_N \approx \frac{4}{(\Delta s)^2} \tag{14′}$$ [1]

Für den zweiten Differentialquotienten nach der Zeit erhält man in endlichen Differenzen:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \approx \frac{2}{(\Delta t)^2} (\hat{\alpha} - \alpha) \tag{15}$$

mit $\hat{\alpha} = \frac{1}{2} [\alpha(t_1) + \alpha(t_2)]$ wobei $2\Delta t = t_1 - t_2$ ist.

Daraus folgt aus (12′):

$$b_M \approx \frac{2}{(\Delta t)^2} \tag{15′}$$

$\bar{\alpha}$ und $\hat{\alpha}$ sind in dieser Darstellung ein räumlicher bzw. zeitlicher Mittelwert.

1. 2. Relation zwischen Raum- und Zeitmittel; Äquivalenzprinzip

Aus (6′) und (12′) folgt für den Raumpunkt $R = R_0$ zur Zeit $t = t_0$ für die Feldfunktion α:

$$\bar{\alpha} = \hat{\alpha} - \frac{1}{b_M} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\right)_{\substack{R=R_0 \\ t=t_0}} + \frac{1}{a_N} (\nabla^2 \alpha)_{\substack{R=R_0 \\ t=t_0}} \tag{16}$$

[1] Im dreidimensionalen Fall ist: $a_N \approx \frac{6}{(\Delta s)^2}$.

Im Fall einer Äquivalenz von Raum- und Zeitmittel

$$\bar{\alpha} = \hat{\alpha} \tag{17}$$

folgt aus (16) für einen beliebigen Koordinatenpunkt (Übergang zu den „laufenden" Koordinaten):

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - \frac{b_N}{a_N} \nabla^2 \alpha = 0 \tag{18}$$

Dabei wird $\alpha_q = \alpha_q{}^*$ für $q = 1, 2, \ldots N$ und $N = M$. Die c_q werden durch

$$c_q = c_q{}^* = \frac{1}{K} \int_{(K)} \alpha \, \alpha_q \, dx \, dy \, dz \, dt \tag{3'}$$

bestimmt.

Aus (18) folgt nun: Besteht zwischen dem räumlichen und zeitlichen Mittel einer Feldverteilung ein Äquivalenzprinzip, so muß die Feldfunktion einer homogenen Wellengleichung mit

$$c^2 = \frac{b_N}{a_N} \tag{19}$$

genügen. Gleichzeitig folgt aus der homogenen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \alpha = 0 \tag{20}$$

bei Übergang zu endlichen Differenzen im zweidimensionalen Fall nach (14) und (15):

$$\frac{2}{(\Delta t)^2} (\hat{\alpha} - \alpha_0) \doteq c^2 \frac{4}{(\Delta s)^2} (\bar{\alpha} - \alpha_0) \tag{21}$$

Aus (19) folgt für eine zweidimensionale Verteilung:

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\pm \sqrt{2}} \tag{22}$$

Daher muß aus (21) gefolgert werden:

$$\bar{\alpha} = \hat{\alpha} \tag{17}$$

Demnach gilt folgende *eineindeutige* Zuordnung im zweidimensionalen Fall[1]:

a) Existiert für eine Feldfunktion ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel, wobei die räumlichen bzw. zeitlichen Inkremente der betreffenden Mittelung Δs und Δt sind, so genügt eine solche Funktion

[1] Im dreidimensionalen Fall gilt dieselbe Zuordnung. Es wird lediglich $c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\pm \sqrt{3}}$.

einer *homogenen Wellengleichung* mit der Phasengeschwindigkeit $c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{2}}$ und umgekehrt,

b) genügt eine Funktion der homogenen Wellengleichung, so existiert für eine solche Funktion ein *Äquivalenzprinzip* von Raum- und Zeitmittel, sofern das Verhältnis der Gitterdistanz Δs zum Zeitschritt Δt der räumlichen bzw. zeitlichen Mittelung gleich $c \cdot \sqrt{2}$ ist.

Mittels der Relation $\hat{\alpha} = \bar{\alpha}$ läßt sich daher leicht feststellen, ob eine Funktion die homogene Wellengleichung befriedigt. Ferner sagt (21) aus, daß die Abweichung des zeitlichen Mittelwertes vom aktuellen Wert gleich sein muß der Abweichung des räumlichen Mittels vom aktuellen Wert.

Es soll nun noch der stationäre Fall (α von t unabhängig) untersucht werden. Hier ist dann $\bar{\alpha} = \alpha$. Nach (7) ist aber

$$\bar{\alpha} = \alpha - \sum_{q=1}^{N} \frac{a_q}{a_N} c_q \alpha_q. \tag{23}$$

Daher ist $\hat{\alpha} \neq \bar{\alpha}$. Für den stationären Fall existiert somit *kein* Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel einer Feldverteilung[1].

1.3. Numerische Integration der homogenen Wellengleichung

Wir wollen nun untersuchen, ob man mittels der Relation $\hat{\alpha} = \bar{\alpha}$ die numerische Integration der homogenen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \alpha = 0 \tag{20}$$

vereinfachen kann. Zunächst müssen wir uns über die numerische Stabilität einer solchen Integration einige Gedanken machen. Die Grundprinzipien hierfür haben Courant, Friedrichs und Lewy mitgeteilt [4]. Danach muß die numerische Lösung gegen die analytische konvergieren. Die Wahl der Gitterdistanz Δs darf daher nicht unabhängig vom Zeitschritt Δt erfolgen. Solange diese Inkremente gegenüber der räumlichen und zeitlichen Veränderlichkeit der Bewegungen zufolge der Wellengleichung klein bleiben, werden keine allzu großen Schwierigkeiten auftreten. Es können abe durch eine ungünstige Wahl der Inkremente kleinräumige periodische Vorgänge scheinbar äußerst stark vergrößert werden und die numerische Berechnung völlig verfälschen. Wir müssen daher verhindern, daß die Berechnungen numerisch instabil werden (s. dazu Charney [5] und Charney, Fjörtoft und Neumann [6]). Zur Wahrung der numerischen Stabilität können wir folgendes hinreichendes Kriterium angeben:

[1] Ausgenommen an Feldpunkten, die der Laplaceschen Gleichung genügen (trivialer Fall).

Wir schreiben zunächst die homogene Wellengleichung (20) in Form von endlichen Differenzen:

$$\frac{1}{\Delta t^2}\Big[\alpha(x,y,t+\Delta t)+\alpha(x,y,t-\Delta t)-2\,\alpha(x,y,t)\Big]=$$
$$=\frac{c^2}{\Delta s^2}\Big[\alpha(x+\Delta x,y,t)+\alpha(x-\Delta x,y,t)+\alpha(x,y+\Delta y,t)+ \quad (24)$$
$$+\alpha(x,y-\Delta y,t)-4\,\alpha(x,y,t)\Big]$$

wobei $\Delta x=\Delta y=\Delta s$ ist.

Da sich die allgemeine Lösung von (20) aus einer Summe von harmonischen Schwingungen zusammensetzt, wollen wir eine solche herausgreifen:

$$\alpha_j = e^{i\,(kx+ly-\nu t)}.$$

Führen wir diesen Ansatz in (24) ein, so erhalten wir:

$$e^{i\nu\Delta t}+e^{-i\nu\Delta t}=2-4\,E \qquad (24')$$

mit $E=c^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta s}\right)^2\left[\sin^2\frac{k\Delta s}{2}+\sin^2\frac{l\Delta s}{2}\right]$. Oder nach weiterer Umformung folgt:

$$\cos\nu\Delta t=1-2\,E \qquad (24'')$$

Nun ist stets $|\cos\nu\Delta t|\leqq 1$. Daher muß, damit die numerische Stabilität der Rechnung gewahrt bleibt, die Größe E so gewählt werden, daß der Betrag von $|1-2E|\leqq 1$ verbleibt. Da $E>0$ ist, ist diese Bedingung für $E\leqq 1$ wirklich erfüllt. Daraus folgt, weil $\mathrm{Max}\left[\sin^2\frac{k\Delta s}{2}+\right.$ $\left.+\sin^2\frac{l\Delta s}{2}\right]=2$, das Stabilitätskriterium für die numerische Rechnung:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}\geqq c\cdot\sqrt{2} \qquad (25)$$

Existiert ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel einer Feldfunktion, so erhalten wir nach (22) eine untere Grenze für die numerische Stabilität.

Für die numerische Lösung der homogenen Wellengleichung bi den wir zunächst den zweiten Differenzenquotienten nach der Zeit an einem Feldpunkt in der m-ten Zeile und n-ten Spalte zum Zeitpunkt t (siehe Gl. (15)]:

$$\left(\frac{\Delta^2\alpha}{\Delta t^2}\right)_{m,n,t}=\frac{1}{(\Delta t)^2}(\alpha_{m,n,t+1}+\alpha_{m,n,t-1}-2\,\alpha_{m,n,t}). \qquad (26)$$

Die Feldgröße α an demselben Feldpunkt ist daher zur Zeit $t+1$:

$$\alpha_{m,n,t+1}=2\,\alpha_{m,n,t}-\alpha_{m,n,t-1}+(\Delta t)^2\left(\frac{\Delta^2\alpha}{\Delta t^2}\right)_{m,n,t} \qquad (27)$$

Der zweite räumliche Differenzenquotient am Feldpunkt (m, n) schreibt sich nach (14) zu:

$$(\nabla_N{}^2\alpha)_{m,n,t} = \frac{1}{(\Delta s)^2}(\alpha_{m+1,n,t} + \alpha_{m-1,n,t} + \alpha_{m,n+1,t} + \\ + \alpha_{m,n-1,t} - 4\alpha_{m,n,t}). \tag{28}$$

Als numerische Lösung der homogenen Wellengleichung erhalten wir dann im Feldpunkt (m, n) zur Zeit $t + 1$ folgende Feldgröße:

$$\alpha_{m,n,t+1} = 2\alpha_{m,n,t} - \alpha_{m,n,t-1} + 2B(\bar{\alpha}_{m,n,t} - \alpha_{m,n,t}) \tag{29}$$

mit $B = 2c^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta s}\right)^2$. Für die Wahrung der numerischen Stabilität muß nach (25) $B \geqq 1$ sein. Wir können daher das Stabilitätskriterium auch schreiben zu:

$$c^2 = \frac{B}{2}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 \quad \text{mit } B \geqq 1. \tag{25'}$$

Für $B = 1$ erhalten wir aus (29) folgende vereinfachte Form:

$$\alpha_{m,n,t+1} = 2\bar{\alpha}_{m,n,t} - \alpha_{m,n,t-1} \tag{30}$$

Aus (30) folgt unmittelbar $\hat{\alpha} = \bar{\alpha}$. Somit kann man umgekehrt mit Hilfe des Äquivalenzprinzipes sehr einfach eine numerische oder graphische Integration der homogenen Wellengleichung durchführen. Aus (29) folgt ferner:

$$\hat{\alpha} = B\bar{\alpha} + \alpha(1 - B). \tag{29'}$$

Diese Beziehung stellt eine Erweiterung des Äquivalenzprinzipes dar (siehe Abschnitt 2.3.).

Eine numerische Integration der Wellengleichung ist nur dann zweckmäßig, wenn z. B. die Anfangsbedingungen analytisch nicht formuliert werden können. Die Vorgabe der Funktionswerte an diskreten Gitterpunkten zu Zeit $t - 1$ und t enthält aber das Anfangswertproblem. Durch diese Vorgabe erhalten wir eine numerische Lösung der homogenen Wellengleichung mittels (29) oder (30) für die Zeit $t + 1$.

1.4. Verhältnis zwischen räumlicher und zeitlicher Dämpfung

Das räumliche und zeitliche Mittel läßt sich auch in folgender Form darstellen:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\alpha} &= A_r \cdot \alpha \\ \hat{\alpha} &= A_t \cdot \alpha\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

mit A_r = räumlicher Dämpfungsfaktor und A_t = zeitlicher Dämpfungsfaktor. Nach (7) und (13) ist bekanntlich:

$$\bar{\alpha} = \sum_{q=1}^{N}\left(1 - \frac{a_q}{a_N}\right)c_q\alpha_q, \tag{7}$$

$$\hat{\alpha} = \sum_{q=1}^{M}\left(1 - \frac{b_q}{b_M}\right)c_q{}^*\alpha_q{}^*. \tag{13}$$

Für $a_1 < a^* < a_N$ bzw. für $b_1 < b^* < b_M$ können wir mit Hilfe von (2) und (8) Gl. (7) und (13) auch schreiben zu:

$$\bar{\alpha} = \left(1 - \frac{a^*}{a_N}\right) \alpha_{t=t_0}, \tag{32}$$

$$\hat{\alpha} = \left(1 - \frac{b^*}{b_M}\right) \alpha_{R=R_0}. \tag{33}$$

Daraus ergibt sich für die beiden Dämpfungsfaktoren:

$$\begin{aligned} A_r &= \left(1 - \frac{a^*}{a_N}\right), \\ A_t &= \left(1 - \frac{b^*}{b_M}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Für ein Äquivalenzprinzip von $\bar{\alpha} = \hat{\alpha}$ folgt dann:

$$A_r = A_t \quad \text{bzw.} \quad \frac{a^*}{a_N} = \frac{b^*}{b_N}. \tag{35}$$

Nach (31) können wir für die Dämpfungsfaktoren auch schreiben:

$$A_t = \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad A_r = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \tag{36}$$

oder in Worten: Der zeitliche Dämpfungsfaktor ist gleich dem Verhältnis des zeitlichen Mittelfeldes zum aktuellen Feld und der räumliche Dämpfungsfaktor ist gleich dem Verhältnis des räumlichen Mittelfeldes zum aktuellen Feld.

Gilt nun für eine Raum-Zeitfunktion α das Äquivalenzprinzip $\bar{\alpha} = \hat{\alpha}$, so können die Dämpfungsfaktoren A_t und A_r auch wie folgt geschrieben werden:

$$A_t = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad A_r = \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} \tag{37}$$

oder in Worten: Der zeitliche Dämpfungsfaktor ist gleich dem Verhältnis des räumlichen Mittelfeldes zum aktuellen Feld und der räumliche Dämpfungsfaktor ist gleich dem Verhältnis des zeitlichen Mittelfeldes zum aktuellen Feld.

1.5. Untersuchungen über partikuläre Integrale von nichtlinearen Differentialgleichungen

Wir konnten nachweisen, daß, falls ein Äquivalenzprinzip zwischen dem Raum- und Zeitmittel einer Feldfunktion besteht, diese der homogenen Wellengleichung mit $c^2 = \frac{b_N}{a_N}$ genügen muß. Nun konnte aber H. REUTER [2] — wie bereits eingangs erwähnt — ein solches Äquivalenzprinzip

für ein Geopotentialfeld statistisch ableiten. Dies wirft die Frage auf, ob eine Feldverteilung des Geopotentials eine homogene Wellengleichung befriedigen kann und unter welchen Bedingungen.

Zunächst müssen wir festhalten, daß eine allgemeine Ableitung von Differentialgleichungen für das Geopotentialfeld äußerst schwierig ist. Man hat sich daher entschlossen, Teilprobleme zu lösen, und sogenannte „Modellatmosphären" zu schaffen. Die physikalischen Vorgänge in einer solchen Modellatmosphäre werden durch nichtlineare partielle Differentialgleichungen beschrieben. C. G. Rossby hat durch eine Linearisierung einer solchen Modellgleichung (= barotrope divergenzfreie Vorticitygleichung) ein partikuläres Integral dieser linearisierten Differentialgleichung gewinnen können. Diese partikuläre Lösung, die auch ein partikuläres Integral der nichtlinearen Vorticitygleichung ist, beschreibt dynamische Vorgänge in der Atmosphäre zum Teil recht gut.

Wie im Abschnitt 2 noch näher ausgeführt werden wird, ist diese Lösung gleichzeitig auch eine Lösung der homogenen Wellengleichung (lineare partielle Differentialgleichung vom hyperbolischen Typ). Für solche partikuläre Integrale existiert nach dem bisher Gesagten ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel. Der stationäre Fall ist aber dabei ausgenommen (siehe S. 309).

Wir wollen daher zwei Flüssigkeitsströmungen, die mittels nichtlinearer partieller Differentialgleichungen aus der Hydrodynamik beschrieben werden können, näher untersuchen, da diese den „Prototyp" für die Modellatmosphären, die wir im Abschnitt 2 genauer behandeln werden, darstellen.

1.5.1. Zweidimensionale Flüssigkeitsströmung mit vertikalen Wirbelkomponenten

Für eine zweidimensionale, divergenzfreie, inkompressible Flüssigkeitsströmung (ohne Reibungseinfluß) gilt folgender Erhaltungssatz der Wirbelgröße:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla \zeta = 0. \tag{38}$$

$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(u, v)$ ist der horizontale Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten u und v.

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{39}$$

stellt die Wirbelgröße dar.

Nach Einführung einer Stromfunktion ψ folgt für

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{40}$$

Gl. (30) in der Form:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\nabla^2 \psi, \psi). \tag{41}$$

Gl. (41) ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 3. Ordnung. $J(\alpha, \beta)$ stellt den Jakobioperator dar und ist als Funktionaldeterminante

$$J(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x}, & \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{42}$$

definiert. Für die weiteren Untersuchungen ist noch folgender Satz von Wichtigkeit: Für eine Linearkombination

$$\alpha + a\,\beta = 0 \tag{43}$$

folgt $J(\alpha, \beta) = 0$. Auf diesen Satz werden wir noch zurückkommen. Nach (2) können wir die Stromfunktion ψ nach orthogonalen Funktionen entwickeln:

$$\psi = \sum_{q=1}^{N} c_q \psi_q, \tag{2'}$$

wobei die ψ_q bei Vorgabe der Randbedingungen der Eigenwertgleichung

$$\nabla^2 \psi_q + a_q \psi_q = 0 \tag{4'}$$

genügen müssen. Demnach ist nach (43)

$$J(\nabla^2 \psi_q, \psi_q) = 0 \tag{44}$$

Die einzelnen Komponenten der Stromfunktion beschreiben demnach stationäre Wirbelfelder, da aus (41) dann folgt:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi_q}{\partial t} = 0. \tag{45}$$

Für die Stromfunktion ψ selbst hingegen erhält man nach (2'):

$$J(\nabla^2 \psi, \psi) = J(\nabla^2 \sum_{q=1}^{N} c_q \psi_q, \sum_{q=1}^{N} c_q \psi_q). \tag{46}$$

Nach (5) erhalten wir aus (46)

$$J(\nabla^2 \psi, \psi) = J(\sum_{q=1}^{N} c_q \psi_q, \sum_{q=1}^{N} a_q c_q \psi_q). \tag{47}$$

Aus (47) folgt:

$$J(\sum_{q=1}^{N} c_q \psi_q, \sum a_q c_q \psi_q) = \begin{cases} \neq 0 & (a) \\ = 0 & (b) \end{cases} \tag{48}$$

a) Sind die Eigenwerte a_q nicht $(N-1)$-fach entartet, so folgt:

$$J(\nabla^2 \psi, \psi) \neq 0 \tag{49}$$

Ist aber die Stromfunktion ψ nicht nur ein partikuläres Integral der Wirbelgleichung (41), sondern gleichzeitig auch ein partikuläres Integral der homogenen Wellengleichung (20), so existiert für eine solche Stromfunktion ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel.

b) Sind die Eigenwerte a_q $(N-1)$-fach entartet, so folgt aus (48)

$$J(\nabla^2 \psi, \psi) \equiv 0 \tag{50}$$

Die Stromfunktion ψ beschreibt in diesem Fall — da nach (41) $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = 0$ ist — ein stationäres Wirbelfeld. Ist ferner das Feld von ψ stationär, so existiert für ein solches Feld kein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel (siehe S. 309).

1.5.2. Zweidimensionale Flüssigkeitsströmung, die unter dem Einfluß der ablenkenden Kraft der Erdrotation steht

Für eine zweidimensionale, inkompressible, divergenzfreie Flüssigkeitsströmung (bei Vernachlässigung des Reibungseinflusses), die unter dem Einfluß der ablenkenden Kraft der Erdrotation steht, lautet der Erhaltungssatz der Wirbelgröße:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla \eta = 0. \tag{51}$$

$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(u, v)$ ist wieder der horizontale Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten u und v.

$$\eta = \zeta + f \tag{52}$$

stellt die absolute Wirbelgröße (Vorticity) dar und setzt sich aus der relativen Wirbelgröße

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{39}$$

und dem Coriolisparameter

$$f = 2\,\Omega \sin \varphi \tag{53}$$

zusammen. Dabei ist Ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde und φ die geographische Breite.

Führen wir nach (40) eine Stromfunktion ψ ein, so schreibt sich (51) zu:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{54}$$

oder

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \psi + f) = 0. \tag{54'}$$

Im stationären Fall folgt nach (43):

$$\nabla^2 \psi + a \psi = -f \tag{55}$$

Dieser Fall wurde von F. Hoiland [7] ausführlich diskutiert. Im nichtstationären Fall existiert wieder, falls ψ nicht nur ein partikuläres Integral der Wirbelgleichung (54) ist, sondern auch die homogene Wellengleichung (20) befriedigt, ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel der Stromfunktion.

2. Anwendung in der Meteorologie

In Abschnitt 1 wurden die allgemeinen Grundlagen für ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel einer Feldfunktion erarbeitet. In diesem Abschnitt sollen die physikalischen Vorgänge in der Atmosphäre untersucht werden, die einem solchen Äquivalenzprinzip genügen.

Wie eingangs bereits erwähnt, konnte H. REUTER [2] an Hand von umfangreichen statistischen Untersuchungen nachweisen, daß für eine Geopotentialverteilung im 850 mb-Niveau eine hohe Korrelation — Korrelationskoeffizient im Mittel 0,93 — zwischen dem räumlichen und zeitlichen Mittelwert besteht. Der Nachweis eines solchen Äquivalenzprinzips erfolgte durch die Ableitung einer Regressionsgeraden in der Form:

$$(\widehat{H} - N) = a\,(\overline{H} - N) + b \tag{56}$$

mit $H = gz$ als Geopotential und N als Normalwert. Die Symbole $(\overline{\ })$ und $(\widehat{\ })$ geben die räumliche bzw. die zeitliche Mittelung an. Untersuchungen für insgesamt 1620 Fälle ergaben im Mittel die Werte $a \approx 1$ und $b \approx 0$. Somit folgte aus (56):

$$\widehat{H} = \overline{H} \tag{57}$$

Zunächst vermutete man, daß es sich im Falle der Relation (57) um ein Ausgleichsprinzip in der Atmosphäre handeln würde [2], das durch eine lineare partielle Differentialgleichung vom parabolischen Typ (Wärmeleitungsgleichung):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = K \nabla^2 \alpha \tag{58}$$

beschrieben werden kann. Wie aber die Ausführungen in Abschnitt 1. zeigen, wird durch das Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel der Geopotentialverteilung (57) ein *Wellen-* bzw. *Schwingungsvorgang* in der Atmosphäre beschrieben, der durch eine homogene Wellengleichung (partielle Differentialgleichung vom hyperbolischen Typ):

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \alpha = 0 \tag{20}$$

geregelt wird.

Da die Relation $\widehat{H} = \overline{H}$ statistisch hinreichend fundiert ist — F. HUBER-POCK [8] kommt bei Untersuchungen im 500 mb-Niveau zu denselben Ergebnissen —, kann aus den bisherigen Ableitungen geschlossen werden, daß *lineare Prozesse* in der Atmosphäre einen wesentlichen Anteil an atmosphärischen Vorgängen haben. D. S. COOLEY [9] kommt bei Untersuchungen über statistische Vorhersageoperatoren — es wird hiebei die Greensche Funktion (Einflußfunktion) aus einem genügend großen Kollektiv statistisch bestimmt — auf ganz andere Art zu denselben Aussagen. Eine lineare Kombination für die Vorhersagefunktion lieferte sehr gute Ergebnisse.

2.1. Untersuchungen in einer barotropen Atmosphäre

Es wird nun das Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel einer Feldfunktion nach Abschnitt 1.5. in einer barotropen Atmosphäre untersucht werden.

2.1.1. Rossby-Wellen

Für die Wirbelgleichung (54′), die eine barotrop geschichtete Atmosphäre beschreibt:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \psi + f) = 0 \tag{54'}$$

gab C. G. Rossby als erster ein partikuläres Integral

$$\psi = -U y + \psi_0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(x - ct)} \tag{59}$$

mit der Lösungsbedingung:

$$c = U - \frac{\beta \lambda^2}{4\pi^2} \tag{60}$$

an. Hier bedeuten: U = const. zonaler Grundstrom,
ψ_0 = const. Amplitude,
c = Phasengeschwindigkeit der Welle in der x-Richtung,
λ = Wellenlänge.

Die Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters f wird durch

$$f = f_0 + \beta \cdot y \tag{61}$$

mit β = const. berücksichtigt.

Nun läßt sich aber sehr einfach zeigen, daß (59) nicht nur ein partikuläres Integral der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung 3. Ordnung (54′) ist, sondern auch ein partikuläres Integral der homogenen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = 0, \tag{20'}$$

wobei nach (22)

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{2}}. \tag{22}$$

Nach Abschnitt 1.5.2. existiert im nichtstationären Fall für die Stromfunktion ψ ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel. Als Bedingung hiefür folgt nach (22) und (60):

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{2}} = U - \frac{\beta \lambda^2}{4\pi^2}. \tag{62}$$

Bevor wir (62) ausführlich diskutieren, müssen wir noch folgende Überlegung anstellen: Mittels der Inkremente Δs und Δt werden die räumlichen und zeitlichen Mittelfelder gebildet. Liegt ein Äquivalenzprinzip zwischen diesen Mittelfeldern vor, so gehorcht das aktuelle Feld der Wellengleichung (20'), wobei die Phasengeschwindigkeit c nach (22) bestimmt wird. Demnach dürfen die Δs- und die Δt-Werte nicht unabhängig voneinander gewählt werden, sondern diese müssen einerseits der Relation (22) genügen, anderseits müssen die durch diese Inkremente gebildeten Differenzenoperatoren ∇_N^2 und $\frac{\Delta^2}{\Delta t^2}$ die Differentialoperatoren ∇^2 und $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ hinreichend genau annähern.

Im Fall von ROSSBY-Wellen wollen wir diese Näherung untersuchen. Für die ROSSBY-Lösung:

$$\psi = -U y + \psi_0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(x-ct)} \tag{59}$$

erhalten wir

$$\nabla^2 \psi = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi_0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(x-ct)}. \tag{63}$$

Anderseits folgt aus

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \frac{1}{4}\left[\psi(x+d, y) + \psi(x-d, y) + \psi(x, y+d) + \psi(x, y-d)\right] \\ \nabla_N^2 \psi &\equiv \frac{4}{(\Delta s)^2}(\bar{\psi} - \psi) = -\frac{2}{(\Delta s)^2}\left(1 - \cos\frac{2\pi \Delta s}{\lambda}\right)\psi_0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(x-ct)}. \end{aligned} \tag{64}$$

Daraus folgt

$$Q_1 = \frac{\nabla_N^2 \psi}{\nabla^2 \psi} = \frac{\lambda^2\left(1 - \cos\frac{2\pi \Delta s}{\lambda}\right)}{2\pi^2 (\Delta s)^2} \tag{65}$$

Ist die Näherung $\nabla_N^2 \psi \approx \nabla^2 \psi$ gut, so muß der Quotient Q_1 den Wert 1 näherungsweise erreichen.

In Abb. 2 wird der Verlauf von Q_1 in Abhängigkeit von der ROSSBY-Wellenlänge λ dargestellt. Die Einheiten von λ wurden in Δs gewählt. Bezeichnen wir eine Näherung zu 90% noch als „gut", so muß

$$\lambda > 5.5\, \Delta s \tag{66}$$

sein, damit der Differentialoperator ∇^2 durch den Differenzenoperator ∇_N^2 hinreichend genau angenähert wird.

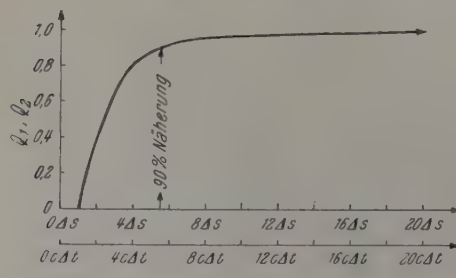

Abb. 2. Abhängigkeit der Quotienten Q_1 und Q_2 von der Wellenlänge λ

Ferner können wir von der Stromfunktion ψ noch die zweite Ableitung nach der Zeit bilden:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} c^2 \psi_0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(x-ct)}. \tag{67}$$

Gleichzeitig ist aber auch:

$$\frac{\Delta^2 \psi}{\Delta t^2} \equiv \frac{2}{(\Delta t)^2}(\hat{\psi} - \psi) = -\frac{2}{(\Delta t)^2}\left(1 - \cos\frac{2\pi c \Delta t}{\lambda}\right)\psi_0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(x-ct)}, \tag{68}$$

wobei das zeitliche Mittelfeld durch

$$\hat{\psi} = \frac{1}{2}[\psi(t+\Delta t) + \psi(t-\Delta t)]$$

dargestellt wurde. Für $\frac{\Delta^2 \psi}{\Delta t^2} \approx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ muß der Quotient

$$Q_2 = \frac{\Delta^2 \psi}{\Delta t^2} \Big/ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\lambda^2\left(1 - \cos\frac{2\pi c \Delta t}{\lambda}\right)}{2\pi^2 (c \cdot \Delta t)^2} \tag{69}$$

den Wert 1 näherungsweise erreichen. In Abb. 2 wird auch der Verlauf von Q_2 mit der Wellenlänge λ dargestellt, wobei λ in Einheiten $c \cdot \Delta t$ aufgetragen wurde. Wählen wir als untere Grenze für eine „gute" Näherung wieder 90%, so muß

$$\lambda \geqq 5{,}5\, c \cdot \Delta t \tag{70}$$

sein, damit $\frac{\Delta^2 \psi}{\Delta t^2} \approx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ ist.

Wir wollen nun (62) ausführlich diskutieren. Dabei müssen wir festhalten, daß alle aus der Diskussion von (62) hervorgegangenen Wertepaare $(\Delta s, \Delta t)$ im Einzelfall noch dahingehend zu untersuchen sind, ob diese die vorhin angegebene 90%-Grenze nicht unterschreiten.

Zur Diskussion von (62) gehen wir von folgender Überlegung aus. Die Phasengeschwindigkeit c der Rossby-Welle ist eine in der Natur vorgegebene Größe. Wir wollen daher für eine Mannigfaltigkeit von c die Bedingungen für das oben erwähnte Äquivalenzprinzip nach (62) ermitteln. Für 4 verschiedene Gitterdistanzen Δs wurden bei vorgegebenen Phasengeschwindigkeiten c die erforderlichen Zeitintervalle Δt berechnet (Tabelle 1). Zur Berechnung der Werte in Tabelle 1 wurde lediglich der linke Teil von Relation (62) verwendet. Dabei bezieht sich die Phasengeschwindigkeit c in Einheiten Längengrade pro Tag auf 45° geographischer Breite. Will man die Werte von c in Einheiten Meter pro Sekunde angeben, so sind die Werte für c in Grad pro Tag mit dem Faktor 0,91 zu multiplizieren. Mittels Tabelle 1 kann man einfach die Bedingungen für ein Äquivalenzprinzip überblicken. Die Werte rechts von der stark ausgezogenen Beran-

Tabelle 1[1]. *Zeitintervalle Δt (in Einheiten 10^5 sec; 24 Stunden = 0,86 . 10^5 sec) für verschiedene Gitterdistanzen Δs (in km) bei vorgegebenen Phasengeschwindigkeiten c (= Grad/Tag) von Rossby-Wellen bezogen auf 45° Breite*

Δs / c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
333	2,58	1.30	0,87	0,65	0,51	0,43	0,37	0,32	0,29	0,26	0,24	0,22	0,20	0,18	0,17	0,16
666	5,16	2.60	1,74	1.30	1,02	0,86	0,74	0,64	0,58	0,52	0,48	0,44	0,40	0,36	0,34	0,32
1000	7,74	3.90	2,61	1.95	1,53	1,29	1,11	0,96	0,87	0,78	0,72	0,66	0,60	0,54	0,51	0,48
1333	10,32	5.20	3,48	2,60	2,04	1,72	1,48	1,28	1,16	1,04	0,96	0,88	0,80	0,72	0,68	0,64

[1] Die in Tabelle 1 angegebenen Werte weichen von den von H. PICHLER [*10*] gefundenen Werten etwas ab. Dies ist dadurch erklärlich, daß in beiden Fällen von einer verschiedenen Definition des zeitlichen Mittelwertes ausgegangen wurde.

dung in Tabelle 1 sind nur von theoretischem Wert, da diese kaum auf Grund der gegebenen Einschränkung durch (66) verwendbar sein werden.

Wir wollen nun einen besonderen Fall herausgreifen: Nach Tabelle 1 muß, falls für das Feld der Stromfunktion ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel besteht, für das Wertepaar $\Delta t = 24$ Stunden und $\Delta s = 666$ km eine Phasengeschwindigkeit von 6° pro Tag gefordert werden. Aus der Erfahrung wissen wir, daß sich im 850 mb-Niveau Wellen mittlerer Wellenlänge sehr häufig mit einer Geschwindigkeit von 6° pro Tag verlagern. H. REUTER hat gerade für diesen Fall ($\Delta t = 24$ Stunden, $\Delta s = 666$ km) das Äquivalenzprinzip nachgewiesen. Somit stimmt die Theorie mit der Erfahrung gut überein.

Nun wollen wir auch noch den rechten Teil von (62) genau auswerten. Dadurch gelingt es auch, die Breitenabhängigkeit der ROSSBY-Wellen mitzuberücksichtigen. Zur Bestimmung, unter welchen Bedingungen ein Äquivalenzprinzip zustande kommt, wählen wir am besten eine Diagrammform (Abb. 3 und Abb. 4). Zunächst geben wir eine Isoplethendarstellung der Größe $\frac{\beta \lambda^2}{4 \pi^2}$ für verschiedene Wellenlängen und geographische Breiten (β variiert bekanntlich mit der geographischen Breite[1]; s. LINKE [*11*]). Diese Isoplethendarstellung (Abb. 3) ist notwendig

[1] Die Auswertung von (62) mit einem variablen β-Wert steht nicht im Widerspruch zur Annahme β = const. (Gl. 61). Für die dynamische Betrachtung — dem zonalen Grundstrom wird eine Wellenstörung überlagert — wird weiterhin mit einem konstanten β-Wert, der dem der geographischen Breite des zonalen Windmaximums entspricht, gerechnet.

zur Bestimmung von Δt und Δs für die zeitliche bzw. räumliche Mittelung des Stromfeldes. Liegt nämlich ein planetarisches Wellensystem (ROSSBY-Wellen) vor, so bestimmen wir mittels des zonalen Windprofiles (zur Konstruktion desselben siehe H. REUTER [*12*]) das Maximum des zonalen Windes und die geographische Breite φ, auf der der Maximalwert auftritt. Längs dieses Breitenkreises wird nun die Wellenlänge λ der ROSSBY-Welle ermittelt. Mit diesem so erhaltenen Wertepaar (φ, λ) gehen wir in das $\frac{\beta\lambda^2}{4\pi^2}$-Diagramm (Abb. 3) ein und bestimmen den dazugehörigen $\frac{\beta\lambda^2}{4\pi^2}$-Wert. Nimmt man nun an, daß der Maximalwert des zonalen Windes dem Grundstrom U (siehe S. 317) entspricht, so kann man mit Hilfe des nächsten Diagrammes (Abb. 4) die

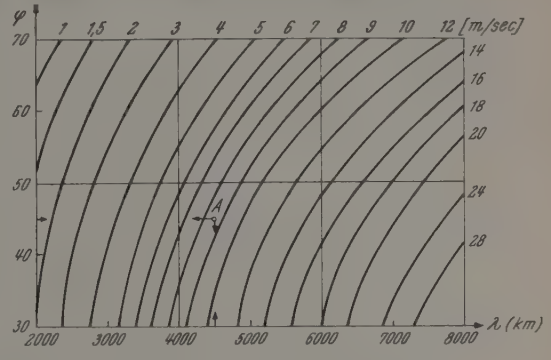

Abb. 3. $\frac{\beta\lambda^2}{4\pi^2}$-Diagramm in Einheiten m/sec

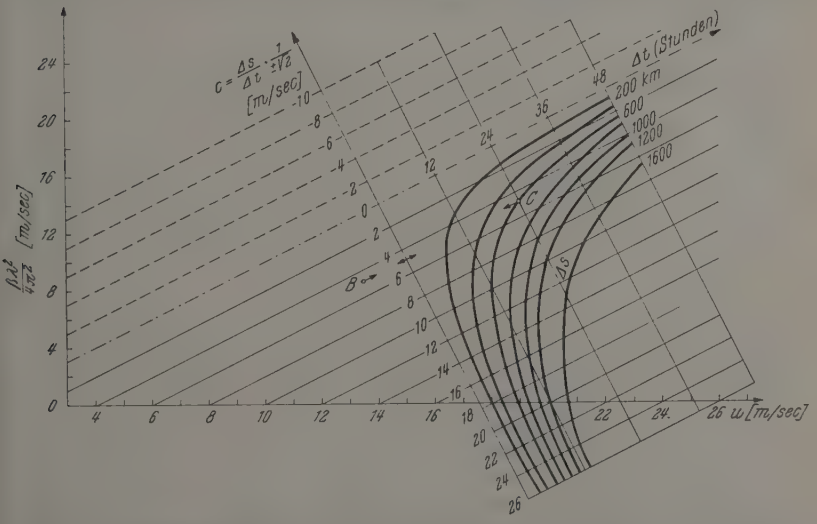

Abb. 4. Diagramm zur Bestimmung der Gitterdistanzen Δs bzw. der Zeitintervalle Δt

Zeitschritte Δt bzw. die Gitterdistanzen Δs einfach bestimmen. Wir gehen dazu mit dem vorhin erhaltenen $\frac{\beta\lambda^2}{4\pi^2}$-Wert in Abb. 4 ein und bekom-

men für einen bestimmten Grundstrom U die dazugehörige Phasengeschwindigkeit c. Nach (62) bzw. (22) folgt daraus der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{2}}$. In Abb. 4 bedeuten demnach die schrägen Linien mit positiver Steigung Linien gleicher Phasengeschwindigkeiten. Dabei geben die ausgezogenen Linien positive, die strichlierten Linien negative Werte (retrograde Verlagerung) an. Die strichpunktierte Linie stellt den stationären Fall ($c = 0$) dar. Wählen wir nun die Linie $c = 0$ gleichzeitig als „Zeitachse" für die Zeitintervalle Δt (Abszisse), so gelangt man mit dem Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{2}}$ als Ordinate ($\equiv$ „c-Achse") zu einer Isoplethendarstellung für die Werte der Gitterdistanzen Δs. In Abb. 4 ist eine Kurvenschar für verschiedene Δs-Werte dargestellt. Für einen bestimmten Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{2}}$ kann man mittels der gegebenen Darstellung sehr einfach für ein vorgegebenes Zeitintervall Δt die dazugehörige Gitterdistanz Δs ermitteln; oder umgekehrt: Wir erhalten bei einer vorgegebenen Gitterdistanz Δs das erforderliche Zeitintervall Δt. Wie weiters aus Abb. 4 ersichtlich ist, wird im stationären Fall ($c = 0$) die Gitterdistanz $\Delta s = 0$; d. h. der räumliche Mittelwert degeneriert zum Zentralwert. Liegt also ein stationäres Wellensystem vor, so existiert *kein* Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel des Stromfeldes (siehe auch S. 309).

Am folgenden Beispiel soll dieses Verfahren veranschaulicht werden. Das Maximum des zonalen Windes tritt z. B. in 45° Breite auf und hat den Wert 13,5 m/sec. Längs dieses Breitenkreises ermitteln wir nun die Wellenlänge der ROSSBY-Welle mit $\lambda = 4500$ km. Mit dem Wertepaar ($\varphi = 45°$, $\lambda = 4500$ km) gehen wir in Abb. 3 ein und erhalten für $\frac{\beta \lambda^2}{4\pi^2} = 8{,}6$ m/sec (siehe Punkt A). Mittels dieser Größe folgt aus Abb. 4 für $U = 13{,}5$ m/sec der Wert des Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und somit der Phasengeschwindigkeit $c = 4{,}95$ m/sec (siehe Punkt B). Daraus erhält man aus Abb. 4 z. B. für ein vorgegebenes Zeitintervall $\Delta t = 24$ Stunden eine Gitterdistanz $\Delta s = 600$ km (s. Punkt C). Dieses Wertepaar ($\Delta t = 24$ Stunden, $\Delta s = 600$ km) entspricht auch der Forderung (66) und (70), wodurch eine hinreichend genaue Annäherung der Differentialoperatoren durch die Differenzenoperatoren gesichert ist.

Die auf diese Art erfolgte Bestimmung von Δs bzw. Δt für die räumliche bzw. zeitliche Mittelbildung gibt einen übersichtlichen Einblick in die Bedingungen, die zur Erfüllung eines Äquivalenzprinzipes von Raum- und Zeitmittel des Stromfeldes bei ROSSBY-Wellen erforderlich sind. Diese Ermittelung der Zeit- bzw. Rauminkremente ist für die Praxis im Wetterdienst von Bedeutung. Wir kommen im Abschnitt 2. 2. noch ausführlich darauf zurück.

2. 1. 2. Allgemeinere barotrope Wellen

Es soll nun gegenüber Abschnitt 2. 1. 1. eine etwas allgemeinere Darstellung der Stromfunktion gegeben werden. Man kann leicht nachweisen, daß

$$\psi = -U y + \psi_0 e^{2\pi i \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\omega} - \frac{c_1 t}{\lambda} - \frac{c_2 t}{\omega}\right)} \tag{71}$$

mit der Lösungsbedingung:

$$\frac{c_1}{\lambda} + \frac{c_2}{\omega} = \frac{U}{\lambda} - \frac{\beta}{\lambda (k_1^2 + k_2^2)} \tag{72}$$

ebenfalls ein partikuläres Integral der Wirbelgleichung (54′) (nichtlineare partielle Differentialgleichung 3. Ordnung) ist (siehe H. Pichler [*13*]).

Wie sich wiederum einfach zeigen läßt, ist diese Lösung auch ein partikuläres Integral der homogenen Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - C^2 \nabla^2 \psi = 0 \tag{20′}$$

Als Lösungsbedingung folgt hiefür:

$$\frac{c_1}{\lambda} + \frac{c_2}{\omega} = C \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\omega^2}} \tag{73}$$

Bezeichnung: c_1 = Phasengeschwindigkeit in x-Richtung
c_2 = Phasengeschwindigkeit in y-Richtung
λ = Wellenlänge in x-Richtung
ω = Wellenlänge in y-Richtung
$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad k_2 = \frac{2\pi}{\omega}.$

Nach Abschnitt 1. 5. 2. existiert für die Stromfunktion ψ — dargestellt durch das partikuläre Integral (71) — ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel. Demnach ist

$$C = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \tag{22′}$$

und daher nach (73):

$$\frac{\frac{c_1}{\lambda} + \frac{c_2}{\omega}}{\pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\omega^2}\right)}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{74}$$

Relation (74) ist die Bedingungsgleichung für das oben erwähnte Äquivalenzprinzip. Für $\omega = \infty$ folgt aus (72) und (74)

$$C = c_1 = U - \frac{\beta \lambda^2}{4\pi^2} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{2}}. \tag{62}$$

Wir erhalten somit für $\omega = \infty$ die Lösungsbedingung für Rossby-Wellen.

Wir wollen nun die Neigung der Trog- bzw. Keillinien für das partikuläre Integral (71) einführen. Dadurch vereinfacht sich Relation (74). Hiefür setzten wir $\lambda = a\,\omega$. An Stelle von (74) erhalten wir nun:

$$\frac{c_1 + a\,c_2}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+a^2)}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{75}$$

oder

$$\frac{c_1 + a\,c_2}{\pm\sqrt{1+a^2}} = C. \tag{75'}$$

Wie man sich nun leicht überzeugen kann, gibt arccotg a den Neigungswinkel der Trog- bzw. Keillinien für die Stromlinien $\psi = \text{const.}$ an

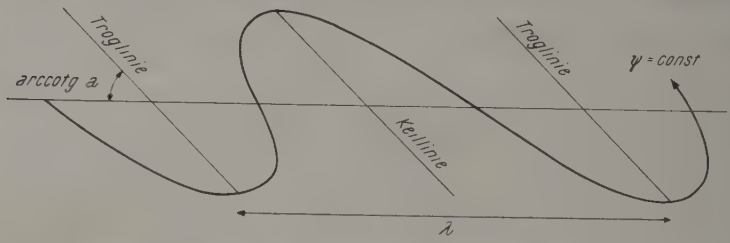

Abb. 5. Verlauf einer Stromlinie $\psi = \text{const.}$ nach (71)

(Abb. 5). Für $a < 0$ liegt die Trog- bzw. Keillinie im Sektor Nord-Ost, für $a > 0$ im Sektor West-Nord (Abb. 6).

Für $a = 0$ schließt die Trog- bzw. Keillinie mit der West-Ostrichtung einen rechten Winkel ein; d. h. wir erhalten somit eine ROSSBY-Welle. Ist $a = 1$, so schließt die Troglinie mit der West-Ostrichtung einen Winkel von 45° ein. In diesem Fall ist dann $\lambda = \omega$. a gibt somit (nach Definition) auch das Verhältnis der Wellenlänge λ zur Wellenlänge ω $\left(a = \frac{\lambda}{\omega}\right)$ an.

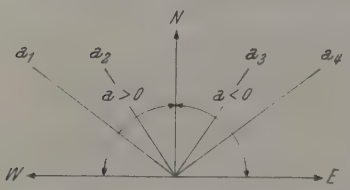

Abb. 6. Neigung der Keil- bzw. Troglinien mit Berücksichtigung des Vorzeichens

Wir wollen nun die Bedingungen für das früher erwähnte Äquivalenzprinzip näher untersuchen. Vorher führen wir aber noch eine Vereinfachung durch: In Hinkunft wollen wir annehmen $a \,.\, c_2$ sei gegenüber c_1 sehr klein ($a \,.\, c_2 \ll c_1$). Diese Annahme dürfte vielfach den tatsächlichen Verhältnissen in der Atmosphäre entsprechen. Gl. (75) geht dann über in

$$c_1 \doteq \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+a^2)} \tag{76}$$

oder

$$c_1 \doteq C \cdot \pm\sqrt{(1+a^2)}. \tag{76'}$$

Gl. (76) — die vereinfachte Bedingungsgleichung für das Äquivalenzprinzip — wollen wir nun ausführlich diskutieren. Dazu soll — wie schon zum Teil im Abschnitt 2. 1. 1. — eine graphische Darstellung dienen. Wir wollen ein Diagramm entwerfen, das uns gestattet, für beliebige Geschwindigkeiten c_1 und Neigungen der Troglinie die dazugehörigen Δs-

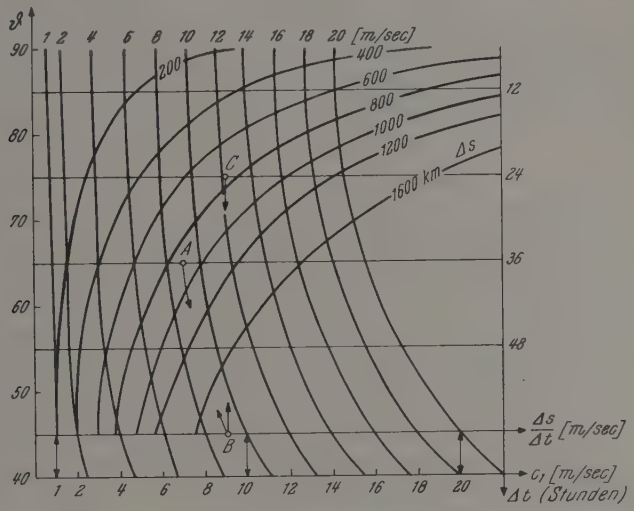

Abb. 7. Diagramm zur Bestimmung der Gitterdistanzen Δs bzw. der Zeitintervalle Δt bei Wellen mit Achsenneigung

bzw. Δt-Werte für die räumliche bzw. zeitliche Mittelung des Stromfeldes abzulesen (Abb. 7).

Zunächst geben wir eine Isoplethendarstellung des Quotienten

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{c_1}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+a^2)}} \tag{76''}$$

in Einheiten m/sec. In Abszissenrichtung wird die Geschwindigkeit c_1 (in m/sec) aufgetragen, in Ordinatenrichtung der Neigungswinkel der Trog- bzw. Keillinie $\vartheta = \operatorname{arccotg} a$. Wir können somit aus Abb. 7 für einen beliebigen Wert von c_1 und für die dazugehörige Neigung der Troglinie den betreffenden Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ermitteln. Da für einen Neigungswinkel von $\vartheta = 45°$ $a = 1$ wird, erhalten wir nach (76) für diesen Winkel: $c_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Man kann daher bei $\vartheta = 45°$ in Abb. 7 parallel zur c_1-Achse eine $\frac{\Delta s}{\Delta t}$-Achse (als Abszisse) zeichnen, wobei die Einheiten in m/sec

mit denen der c_1-Achse zusammenfallen (Zuordnungspfeile in Abb. 7). Wählen wir als Ordinate eine „Zeitachse" mit den Δt-Werten (in Stunden), so kann eine Isoplethendarstellung für die dazugehörigen Gitterdistanzen Δs (in km) gegeben werden. Diese Darstellung wird der oben gegebenen Isoplethendarstellung für die $\frac{\Delta s}{\Delta t}$-Werte überlagert. Auf diese Weise ist es möglich, die erforderlichen Δs-Werte bzw. die Δt-Werte für die räumliche bzw. zeitliche Mittelung des Stromfeldes abzulesen. Wir gehen hiefür mit einem gegebenen Wertepaar (c_1, ϑ) in Abb. 7 ein und erhalten Punkt A. Von diesem Punkt aus geht man längs einer Isolinie $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ oder parallel hiezu bis zur $\frac{\Delta s}{\Delta t}$-Achse und erhält somit Punkt B. Von Punkt B schreitet man längs der Ordinatenrichtung (in Richtung der Zeitachse) bis zum gewünschten Zeitintervall Δt und entnimmt aus der Isoplethendarstellung für Δs die dazugehörige Gitterdistanz Δs (Punkt C). Wir können aber auch umgekehrt für eine bestimmte Gitterdistanz Δs das erforderliche Zeitintervall Δt ermitteln. Folgendes Beispiel sei zur Veranschaulichung gegeben. Die Verlagerungsgeschwindigkeit sei $c_1 = 7{,}0$ m/sec und der Neigungswinkel der Troglinie sei $\vartheta = 65°$. Für dieses Wertepaar erhalten wir für $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 9{,}1$ m/sec. Daraus folgt für ein vorgegebenes Zeitintervall $\Delta t = 24$ Stunden eine dazugehörige Gitterdistanz von $\Delta s = 780$ km (Punkte A, B, C in Abb. 7).

Wir wollen nun noch die Neigung der Troglinie und die Geschwindigkeit c_1 bestimmen. Den Neigungswinkel ϑ der Troglinie entnehmen wir aus der topographischen Darstellung des betreffenden Geopotentialfeldes. Die Geschwindigkeit c_1 können wir entweder durch Extrapolation ermitteln oder wir benützen Gl. (72). Setzen wir hierin $\lambda = a \,.\, \omega$ und vernachlässigen wir gleichzeitig $a \,.\, c_2$ gegenüber c_1 (siehe S. 324), so erhalten wir:

$$c_1 \doteq U - \frac{\beta \lambda^2}{4\pi^2 (1 + a^2)}. \tag{77}$$

Nun können wir analog wie bei den ROSSBY-Wellen vorgehen. Wir ermitteln aus dem zonalen Windprofil den Maximalwert des zonalen Windes und die geographische Breite auf der das Maximum auftritt. Längs dieser geographischen Breite bestimmen wir die Wellenlänge λ und erhalten mittels Abb. 3 den Term $\frac{\beta \lambda^2}{4\pi^2}$. Diesen Ausdruck multiplizieren wir mit dem Faktor $\frac{1}{(1 + a^2)}$, Gl. (77). Mit dem so korrigierten $\frac{\beta \lambda^2}{4\pi^2}$-Term gehen wir in Abb. 4 ein und lesen mit Hilfe des Maximalwertes des zonalen Windes auf der c-Achse nun den Wert für c_1 ab. Mit dem auf diese Art ermittelten Wertepaar (c_1, ϑ) können wir aus Abb. 7 die notwendigen Δs und Δt-Werte entnehmen. Bevor wir diese Diskussion abschließen, müssen

wir noch über die Güte der Approximation $\nabla^2 \psi \approx \nabla_N{}^2 \psi$ und $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \approx \frac{\Delta^2 \psi}{\Delta t^2}$ für die Stromfunktion ψ (71) eine Aussage machen. Untersuchungen haben gezeigt, daß wir die hiefür notwendigen Kriterien aus Abb. 2 ($\lambda \geqq 5{,}5\, \Delta s$, $\lambda \geqq 5{,}5\, c_1 \cdot \Delta t$) entnehmen können, da diese Darstellung von einer analogen für die Stromfunktion ψ nach (71) nach Einführung von $\lambda = a \,.\, \omega$ für verschiedene Werte von a nur unbedeutend abweicht.

Wir sind somit auch in der Lage, für das Stromfeld von barotropen Wellen, die gegenüber der West-Ostrichtung eine Neigung aufweisen, die Bedingungen für ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel, d. h. die erforderlichen Gitterdistanzen Δs bzw. Zeitintervalle Δt für die räumliche bzw. zeitliche Mittelung anzugeben.

2. 2. Verwendung des Äquivalenzprinzipes zur Vorhersage eines Geopotentialfeldes

Da einerseits das Äquivalenzprinzip für ein Geopotentialfeld statistisch hinreichend gesichert ist ([2] und [8]), anderseits auch nachgewiesen werden konnte, daß einfache partikuläre Integrale der barotropen Wirbel (=Vorticity)-Gleichung gleichzeitig auch Lösungen der homogenen Wellengleichung sind, kann versucht werden, mittels der numerischen Integration der Wellengleichung eine Vorhersagekarte für ein Geopotentialfeld zu erstellen. Zunächst muß aber folgendes grundsätzlich klargestellt werden:

Während eine Integration der Vorticitygleichung die Feldverteilung und die dazugehörige Verlagerungsgeschwindigkeit dieses Feldes liefert, muß bei der Integration der homogenen Wellengleichung die Geschwindigkeit des Feldes vorgegeben sein, um die Feldverteilung zu erhalten. Demnach ist zur Vorhersage des Geopotentialfeldes die numerische Integration der Vorticitygleichung vorzuziehen; abgesehen davon, daß die Vorticitygleichung naturgemäß auch die nichtlinearen Vorgänge in der Atmosphäre berücksichtigt.

Da aber zur numerischen Integration der Wirbelgleichung ein großer Rechenaufwand nötig ist — es müssen Elektronenrechenmaschinen eingesetzt werden, die jedoch den kleinen Wetterdiensten nicht zur Verfügung stehen, — soll versucht werden, mittels der einfachen numerischen Integration der Wellengleichung eine Vorhersagekarte des Geopotentialfeldes zu errechnen. Natürlich werden dadurch nur lineare Vorgänge (Schwingungsvorgänge) in der Atmosphäre, die allerdings dominieren, erfaßt. Naturgemäß kann auch dadurch keine plötzliche barokline Neuentwicklung vorhergesagt werden.

Nachdem wir die Grenzen einer solchen Vorhersage aufgezeigt haben, wollen wir uns mit der Ausarbeitung dieser Methode befassen. Zunächst ist die Frage der numerischen Stabilität zu erörtern. Nach Abschnitt 1. 3. dürfen die Rauminkremente nicht unabhängig von den Zeitinkrementen gewählt werden, sondern sie müssen die Relation

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \geqq c\sqrt{2} \tag{25}$$

erfüllen. Im Falle eines Äquivalenzprinzipes von Raum- und Zeitmittel des Geopotentialfeldes ist in (25) die untere Grenze, d. h. das Gleichheitszeichen zu nehmen. Die numerische Integration der homogenen Wellengleichung erfolgt nun nach Gl. (30):

$$H_{+1} = 2\,\bar{H}_0 - H_{-1}. \tag{30'}$$

$H = g\,.\,z$ bedeutet hier das Geopotential, die Indizes geben die Zeitpunkte an, wobei zwischen -1 und 0 bzw. 0 und $+1$ das Zeitintervall Δt liegt. $\bar{H}$ ist das räumliche Mittelfeld von H, gemittelt mit der Gitterdistanz Δs. Tritt in (25) anstelle des Gleichheitszeichens das Größerzeichen, so ist für die numerische Integration der Wellengleichung Formel (29) zu verwenden (Abschnitt 2. 3. 1.).

Wir wollen nun die beiden Inkremente bestimmen. Den Zeitschritt Δt legen wir durch die synoptischen Beobachtungstermine, bzw. durch den gewünschten Prognosentermin fest. Um die Gitterdistanz Δs bestimmen zu können, müssen wir nach (25) die Phasengeschwindigkeit c kennen. Zur Bestimmung bzw. Vorhersage von c können wir zwei Möglichkeiten heranziehen: Wir ermitteln entweder c mittels der Kinematik durch Extrapolation, oder wir bestimmen c mit Hilfe der ROSSBY-Formel (60). Letztere Methode und gleichzeitig die Ermittelung der dazugehörigen Δs- bzw. Δt-Werte wurde im Abschnitt 2. 1. 1. und 2. 1. 2. ausführlich besprochen. Das Anfangswertproblem wird durch die Vorgabe der Geopotentialwerte an diskreten Gitterpunkten zum Zeitpunkt $t = t_0$ und $t = t_{-1}$ gelöst.

An einem Beispiel wollen wir die geschilderte Methode veranschaulichen. Die Ausgangslage zeigt im 500 mb-Niveau ein planetarisches Wellensystem (ROSSBY-Wellen) am 21. Dezember 1958 00 GMT (Abb. 8). Diese Ausgangslage ist besonders gut für unsere Vorhersagemethode geeignet. Wir bestimmen zunächst die zonalen Windkomponenten für einen Bereich von 125° westlicher bis 70° östlicher Länge. Demnach tritt in 45° Breite mit 18,3 m/sec der Maximalwert des zonalen Windprofils auf. Entlang dieser Breite lesen wir nun die Wellenlänge der ROSSBY-Wellen mit 70° Länge ab. Mit Hilfe dieser ermittelten Werte können wir nach Abschnitt 2. 1. 1. aus Abb. 3 und Abb. 4 die entsprechende Verlagerungsgeschwindigkeit c und die dazugehörigen Inkremente Δs bzw. Δt entnehmen. Wir erhalten demnach für $c = 5.5$ m/sec oder 6.05°/Tag. Für $\Delta t = 24$ Stunden resultiert eine Gitterdistanz $\Delta s = 670$ km für die räumliche Mittelung des Ausgangsfeldes. Mittels der Extrapolation erhält man ebenfalls in 45° Breite eine Verlagerungsgeschwindigkeit von 6,05°/Tag. Das Wertepaar ($\Delta s = 670$ km, $\Delta t = 24$ Stunden) entspricht auch der Forderung (66) und (70).

Die Ausgangslage (21. Dezember 1958 00 GMT) und die Situation 24 Stunden vorher (20. Dezember 1958 00 GMT) wird an Hand von Gitterpunkten tabelliert. Nun wird das entsprechende räumliche Mittelfeld gebildet und mit Formel (30') erhalten wir dann sehr einfach das zu vorhersagende Geopotentialfeld zum Termin 22. Dezember 1958

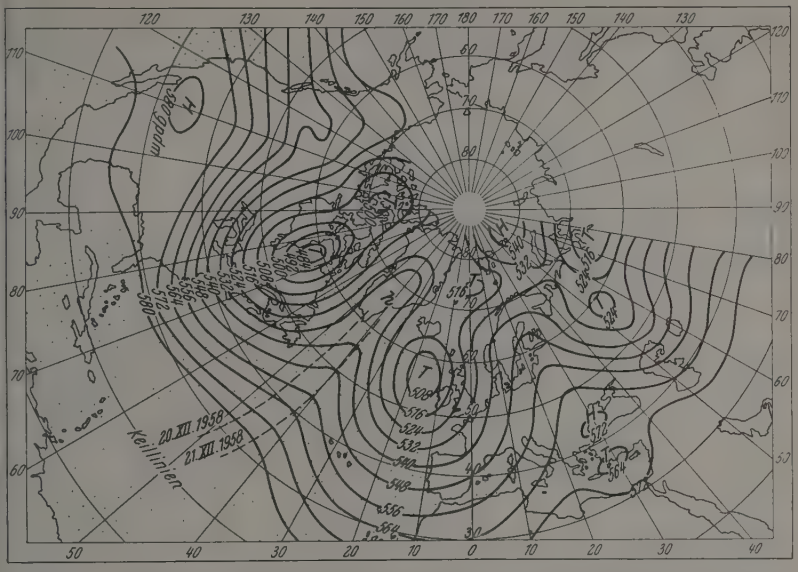

Abb. 8. Ausgangslage. 500mb-Topographie vom 21. Dezember 1958 00 GMT

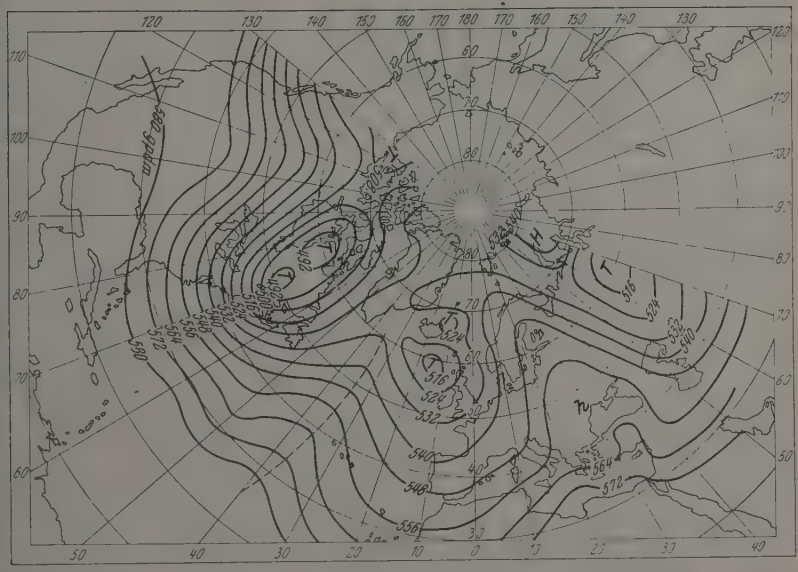

Abb. 9. Vorhergesagte 500mb-Topographie für den 22. Dezember 1958 00 GMT

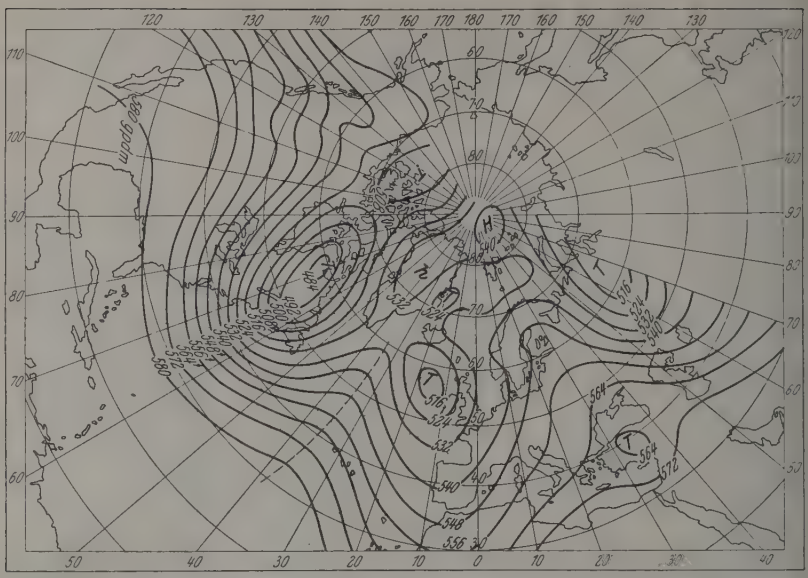

Abb. 10. Tatsächlich eingetroffene Lage. 500 mb-Topographie vom 22. Dezember 1958 00 GMT

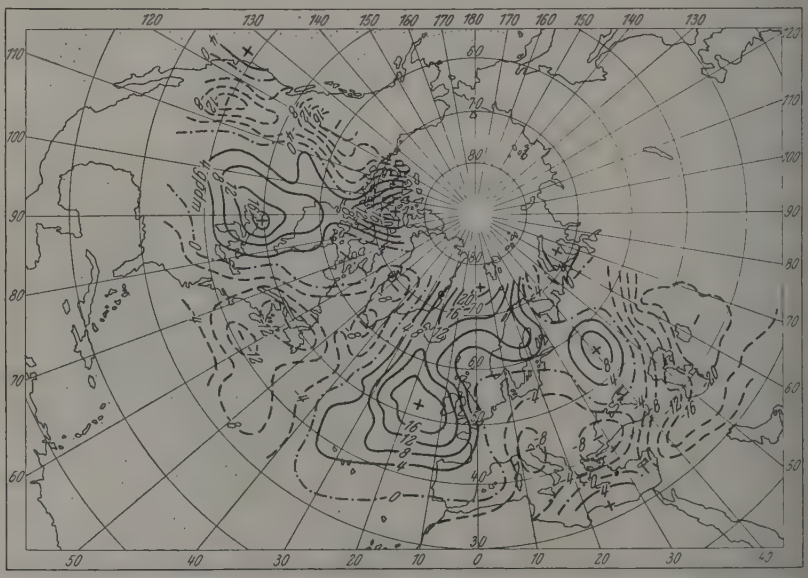

Abb. 11. Vorhergesagte 24stündige Änderung des Geopotentialfeldes in 500 mb (21. Dezember bis 22. Dezember 1958 00 GMT)

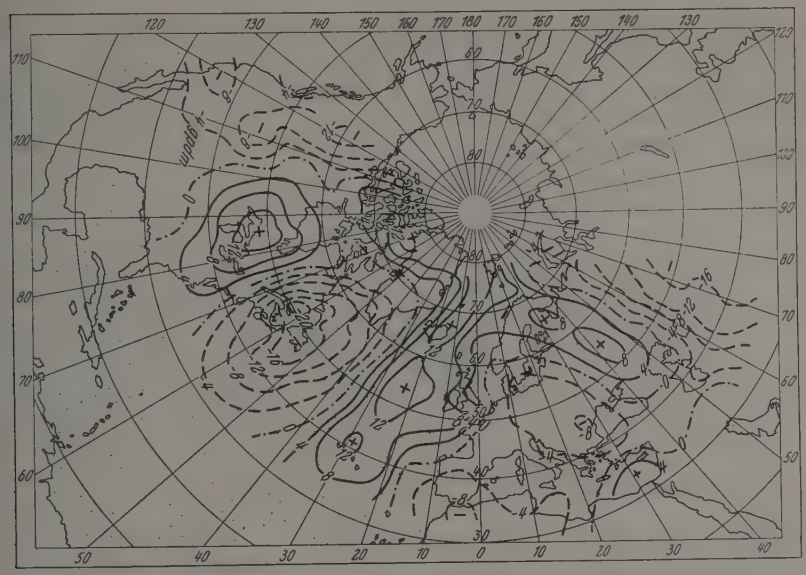

Abb. 12. Tatsächlich eingetroffene 24stündige Änderung des Geopotentialfeldes in 500 mb (21. Dezember bis 22. Dezember 1958 00 GMT)

00 GMT. Der dabei verwendete Zeitaufwand ist äußerst gering. Die einzelnen Schritte dieser Methode können auch graphisch durchgeführt werden. Abb. 9 zeigt das vorhergesagte Geopotentialfeld, während wir aus Abb. 10 die tatsächlich eingetroffene Lage entnehmen können. Ein Vergleich zeigt, daß die Übereinstimmung recht gut ist. Die markierten Keilachsen zeigen die gut erfaßte Verlagerung recht deutlich. Wir wollen auch noch die Änderungskarten (ΔH-Felder) betrachten, da diese einen weit besseren Einblick in die Güte einer Prognose liefern. Abb. 11 zeigt die vorhergesagte 24-stündige Änderung des H-Feldes und Abb. 12 stellt die tatsächlich eingetroffene Änderung dar. Wir sehen, daß die Lage der relativen Maxima und Minima der Isallohypsen recht gut vorhergesagt werden konnten. Als Korrelationskoeffizienten erhält man für die Änderungsfelder $r = 0{,}75$.

Zur Methode ist noch folgendes zu sagen: Die Erfahrung lehrt, daß sich Tröge und Keile rascher verlagern als die Zentren von Tiefdruckgebieten. Deshalb ist das räumliche Mittelfeld im Zentrum eines Tiefs und in der unmittelbaren Umgebung häufig mit einer anderen (geringeren) Gitterdistanz zu bilden, als das übrige Feld. Dadurch kann man Vorhersagefehler im Zentrum eines Tiefs vermeiden, die sonst als Auffüllungseffekt gedeutet werden könnten. Zur Erhärtung bzw. zur Entscheidung über die Verwendung dieser Methode (Integration der homogenen Wellengleichung) sind natürlich noch umfangreiche Untersuchungen an einer längeren Versuchsreihe erforderlich.

2.2.1. Zur Vorhersage von H. Reuter

H. REUTER hat mittels des Äquivalenzprinzips von Raum- und Zeitmittel eines Geopotentialfeldes für das 850 mb-Niveau Vorhersagekarten von Mittelfeldern berechnet ([2], [14] und [15]). Die Formel für ein solches zu prognostizierendes Feld (24-stündiges Mittelfeld) lautet:

$$\hat{H}^{24}_{\text{prog}} \equiv \frac{1}{3}(H_{+1} + H_{+2} + H_{+3}) \cong \frac{1}{3}(5\,\bar{H}_0 - H_0 - H_{-1}) \qquad (78)$$

$H = gz$ ist wiederum das Geopotential. Die Symbole „$\hat{}$" und „$\bar{}$" geben die zeitliche bzw. räumliche Mittelung des H-Feldes an. Die Indizes beziehen sich auf die Beobachtungs- bzw. Prognosentermine; dabei liegt zwischen ihnen ein 12-Stunden-Intervall. Der letzte bekannte Termin ist durch 0 (Mitternachtsbeobachtung) gekennzeichnet. Die negativen Werte weisen in die Vergangenheit, die positiven in die Zukunft.

Diese Methode stellt — aus unseren Untersuchungen zu schließen (Abschnitt 1.3.) — eine Art numerische Integration der homogenen Wellengleichung mit der Geschwindigkeit $c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ dar. Nach unserer Bezeichnung folgt aus (78) ein $\Delta t = 24$ Stunden. Das räumliche Mittelfeld wurde bei H. REUTER [2] mit einer Gitterdistanz $\Delta s = 12°$ Länge in 60° Breite gebildet. Aus diesen Werten folgt eine Verlagerungsgeschwindigkeit $c = 6°$/Tag in 45° Breite. Wendet man Formel (78) mit den angegebenen Δs- und Δt-Werten zur Errechnung eines Vorhersagefeldes an, so setzt man bereits eine Verlagerungsgeschwindigkeit des Feldes von 5.45 m/sec voraus. Nun zeigt es sich, daß dieser Wert häufig in der Natur vorkommt; mitunter aber können im aktuellen Fall mehr oder minder große Abweichungen davon auftreten und dadurch wird zwangsläufig das Prognosenfeld (die Berechnungen können auch numerisch instabil werden) verfälscht werden.

Zur Verbesserung der Vorhersagemethode von H. REUTER bzw. zur Wahrung der numerischen Stabilität der Rechnung ist es angebracht, zum Prognosentermin die wahrscheinlichste Verlagerungsgeschwindigkeit des Feldes (und zum Teil auch von einzelnen Feldelementen, z. B. von Tiefzentren) zu ermitteln (Abschnitt 2.1.1., 2.1.2., 2.2.) und dann erst die betreffende Gitterdistanz nach (25) zu errechnen, und nicht wie bisher immer mit demselben Δs-Wert das räumliche Mittelfeld zu bilden.

2.3. Erweiterung des Äquivalenzprinzipes

Für eine Raum-Zeitfunktion, die der homogenen Wellengleichung mit $c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ genügt, existiert nach Abschnitt 1.2. ein Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel mit den entsprechenden Inkrementen Δs und Δt für die räumliche bzw. zeitliche Mittelung. Dieser Zusammenhang entspricht einer Geraden mit $\operatorname{tg}\gamma = 1$ (γ = Neigungswinkel)

die durch den Koordinatenursprung geht, falls in die Ordinatenrichtung $\hat{\alpha}$ (zeitliches Mittel) und in die Abszissenrichtung $\bar{\alpha}$ (räumliches Mittel) aufgetragen wird (Abb. 13).

Wir wollen nun die Beziehung von Raum- und Zeitmittel einer Feldfunktion, die zwar der homogenen Wellengleichung genügt, wobei aber $c \neq \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, untersuchen. Demnach erhalten wir an Stelle des Äquivalenzprinzips folgenden linearen Zusammenhang (Abb. 13):

$$\hat{\alpha} = a \cdot \bar{\alpha} + b, \quad (79)$$

wobei a und b nicht beliebige Werte annehmen können, sondern voneinander abhängig sind.

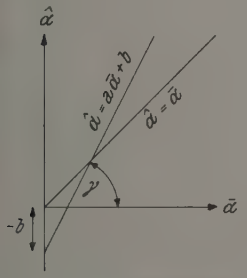

Abb. 13. Zusammenhang zwischen Raum- und Zeitmittel einer Feldfunktion

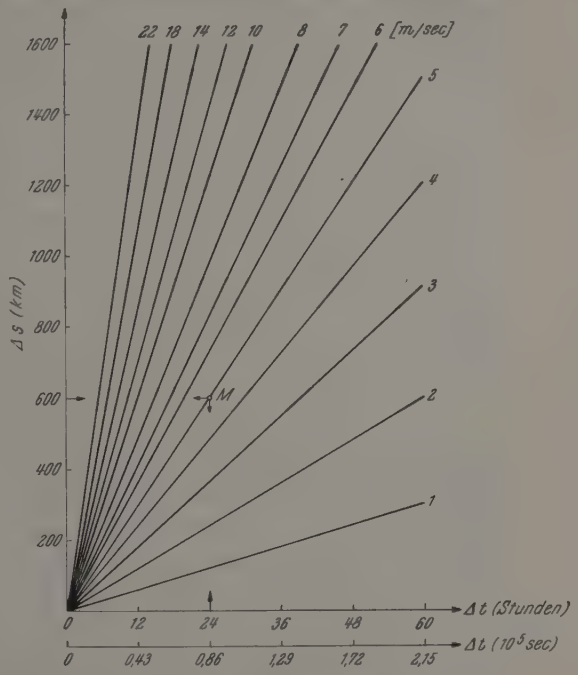

Abb. 14. c_N-Diagramm

Aus (21) folgt für $a = \operatorname{tg} \gamma$:

$$a = 2\,c^2 \cdot \left(\frac{\Delta t}{\Delta s}\right)^2 \quad \text{und für} \quad b = \alpha\,(1 - a); \quad (80)$$

oder nach (29′) ist $a = B$ bzw. $b = \alpha\,(1 - B)$. Für $B = 1$ wird $b = 0$ und daraus folgt $\bar{\alpha} = \hat{\alpha}$.

Im folgenden wollen wir die dem Äquivalenzprinzip entsprechende Geschwindigkeit mit c_N bezeichnen, d. i.:

$$c_N = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{2}}. \quad (22)$$

Nach (25′) erhalten wir dann:

$$c = c_N \cdot \sqrt{B}. \quad (81)$$

Gl. (79) stellt somit eine *Erweiterung des Äquivalenzprinzipes* dar, wobei die Geschwindigkeit der Welle durch (80) gegeben ist.

Wir wollen nun die Zusammenhänge zwischen einem vorgegebenen Raum- *und* Zeitmittelfeld bei einer bestimmten Verlagerungsgeschwindigkeit c des Feldes untersuchen. Hierfür soll zunächst ein Diagramm entworfen werden, das gestattet, für ein beliebiges Zeit- und Raummittelfeld die dem Äquivalenzprinzip entsprechende Geschwindigkeit c_N zu bestimmen. Wählen wir in einem solchen c_N-Diagramm (Abb. 14) als Ordinate eine Δs-Achse und als Abszisse eine Δt-Achse, so können wir mittels (22), die eine lineare Beziehung zwischen Δs und Δt darstellt, ein Geradenbüschel zeichnen, wobei die Steigung der jeweiligen Geraden ein Maß für die Geschwindigkeit c_N ist. Wir können somit für ein beliebiges Wertepaar (Δs, Δt) die dazugehörige Geschwindigkeit c_N (in m/sec) ablesen.

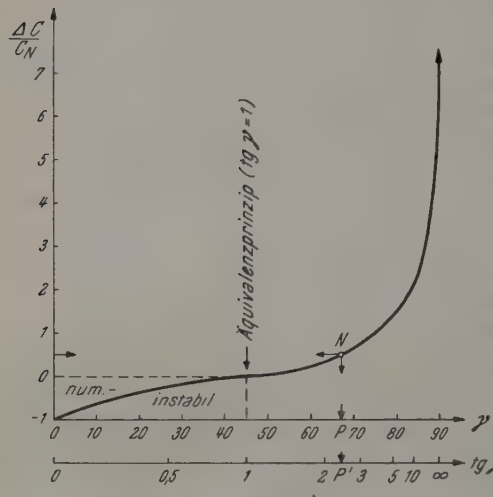

Abb. 15. Abhängigkeit der $\frac{\Delta c}{c_N}$-Werte von γ bzw. B

Stimmt die so ermittelte Geschwindigkeit c_N nicht mit der Geschwindigkeit c des zu untersuchenden Wellenvorganges überein, d. h. existiert kein Äquivalenzprinzip zwischen dem vorgegebenen räumlichen Mittelfeld, gemittelt mit der Gitterdistanz Δs und dem vorgegebenen zeitlichen Mittelfeld mit dem Zeitinkrement Δt, so ist auf die beiden Mittelfelder (29′) bzw. (79) anzuwenden. Die erforderliche Bestimmung von a und b erfolgt in sehr einfacher Weise. Zunächst bestimmen wir die Differenz der beiden Geschwindigkeiten c und c_N:

$$\Delta c = c - c_N. \tag{82}$$

Aus (22) und (81) folgt dann:

$$\frac{\Delta c}{c_N} = +\sqrt{B} - 1. \tag{83}$$

Tragen wir nun in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem in Ordinatenrichtung $\frac{\Delta c}{c_N}$ auf und in Abszissenrichtung $B = \operatorname{tg}\gamma$ bzw. den Neigungswinkel γ, so können wir sofort für einen beliebigen $\frac{\Delta c}{c_N}$-Wert das dazugehörige Wertepaar [$a = B$, $b = \alpha\,(1 - a)$] ermitteln (Abb. 15).

Am folgenden Beispiel sollen diese Erläuterungen veranschaulicht werden. Gegeben sei ein Zeitmittelfeld, charakterisiert durch das Zeit-

inkrement $\Delta t = 24$ Stunden, und ein Raummittelfeld, gemittelt mit der Gitterdistanz $\Delta s = 600$ km. Dabei weist das zu den Mittelfeldern gehörige aktuelle Feld eine Phasengeschwindigkeit $c = 7{,}5$ m/sec auf. Es ist nun zu untersuchen, ob unter diesen Bedingungen für die beiden Mittelfelder ein Äquivalenzprinzip nach (17) besteht oder ob die Erweiterung des Äquivalenzprinzipes auf die beiden Mittelfelder nach (79) bzw. (29′):

$$\hat{\alpha} = B\,\bar{\alpha} + \alpha\,(1 - B) \tag{29′}$$

Anwendung finden soll; d. h. wir müssen den Wert B bestimmen.

Aus dem c_N-Diagramm ermitteln wir zunächst für das Wertepaar ($\Delta s = 600$ km, $\Delta t = 24$ Stunden) die entsprechende Geschwindigkeit $c_N = 4{,}95$ m/sec (Punkt M in Abb. 14). Da c_N nicht mit dem vorgegebenen c-Wert übereinstimmt und somit $B \neq 1$ ist, existiert für die beiden oben angegebenen Mittelfelder kein Äquivalenzprinzip. Wir erhalten daher für den Quotienten $\frac{\Delta c}{c_N}$ einen von Null verschiedenen Wert: $\frac{\Delta c}{c_N} = 0{,}51$. Mit diesem berechneten Wert gehen wir in Abb. 15 ein und lesen den dazugehörigen Neigungswinkel $\gamma = 67°$ ab und daraus folgt $B = \operatorname{tg} \gamma = 2{,}36$ (Punkte N, P und P' in Abb. 15).

Wir erhalten somit für die beiden vorgegebenen Mittelfelder mit der Geschwindigkeit c des aktuellen Feldes nach (29′) folgende lineare Beziehung:

$$\hat{\alpha} = 2{,}36\,\bar{\alpha} - 1{,}36\,\alpha. \tag{29′}$$

Diese Erweiterung des Äquivalenzprinzips von Raum- und Zeitmittel einer Feldfunktion, die der homogenen Wellengleichung genügt, ist für Untersuchungen, bei denen aus praktischen Gründen das Zeitinkrement Δt für die zeitliche Mittelung oder die Gitterdistanz Δs für die räumliche Mittelung nicht geändert werden kann, besonders wertvoll (Abschnitt 2.3.1.).

Will man mittels (29′) eine numerische Integration der homogenen Wellengleichung durchführen, so muß auf die numerische Stabilität der Rechnung geachtet werden. Da nach Abschnitt 1.3. hiefür $B \geqq 1$ gefordert wird, muß bei positiven c_N die Differenz $\Delta c > 0$, bei negativen c_N aber $\Delta c < 0$ sein; d. h. beide Geschwindigkeiten müssen in dieselbe Richtung weisen (siehe in Abb. 15 numerisch instabiler Bereich).

2.3.1. Praktische Anwendung der Erweiterung des Äquivalenzprinzipes

In Abschnitt 2.2. haben wir mittels des Äquivalenzprinzips eine vereinfachte numerische Integration der homogenen Wellengleichung durchgeführt und somit eine Vorhersagekarte für ein Geopotentialfeld nach

$$H_{+1\,(\mathrm{prog})} = 2\,\bar{H}_0^{(N)} - H_{-1} \tag{30″}$$

berechnet. $H = g \,.\, z$ ist wiederum das Geopotential und die Indizes kennzeichnen die einzelnen Zeittermine ($2\,\Delta t = t_{-1} - t_{+1}$). $\bar{H}_0^{(N)}$ gibt

die räumliche Mittelung des Geopotentialfeldes mit der dem Äquivalenzprinzip entsprechenden Gitterdistanz $(\Delta s)_N$ an. Für jede Prognose (fixes Δt) muß demnach für die zu erwartende Geschwindigkeit c jeweils jene Gitterdistanz $\Delta s = (\Delta s)_N$ gesucht werden, für die $c = c_N$ wird.

Aus praktischen Gründen wäre es angebracht, im täglichen Wetterdienst — soweit es die numerische Stabilität erlaubt — mit ein und derselben Gitterdistanz zu arbeiten. Allerdings müssen wir dann von der vereinfachten Form der numerischen Integration der homogenen Wellengleichung mittels des Äquivalenzprinzips abgehen und (29) hiefür heranziehen:

$$H_{+1\,(\mathrm{prog})} = 2\,B^{(i)} \cdot \bar{H}_0{}^{(i)} + 2\,H_0\,(1 - B^{(i)}) - H_{-1}. \qquad (29'')$$

Dabei weist das Symbol (i) auf jene Gitterdistanz $(\Delta s)_i$ hin, mit der das räumliche Mittelfeld $\bar{H}_0{}^{(i)}$ gebildet wurde. Für ein vorgegebenes Wertepaar $[\Delta t, (\Delta s)i]$ können wir nun bei einer zu erwartenden Geschwindigkeit c nach der im Abschnitt 2.3. dargelegten Methode sehr einfach den dazugehörigen Wert $B = B^{(i)}$ bestimmen. Für $c = c_N$ wird $B^{(i)} = B^{(N)} \equiv 1$ und (29″) geht in (30″) über. Ermitteln wir aber bei einer vorgegebenen Geschwindigkeit c für B einen Wert $B^{(i)} < 1$, so ist, damit die numerische Stabilität der Rechnung nach (29″) gewahrt bleibt, $(\Delta s)i$ derart abzuändern, daß $B \geqq 1$ wird. Wenn wir also für die numerische Integration der Wellengleichung (29″) verwenden, bestimmen wir im konkreten Fall nicht wie bei (30″) die dazugehörige Gitterdistanz Δs, sondern wir bestimmen bei gegebenen Δs den dazugehörigen Wert von B. Allerdings muß dabei die numerische Stabilität gewahrt bleiben. Daher empfiehlt es sich von vornherein Δs klein zu wählen, damit $B > 1$ verbleibt. Ferner ist jeweils noch die Güte der Approximationen $\nabla^2 \approx \nabla_N{}^2$ und $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \approx \dfrac{\Delta^2}{\Delta t^2}$ zu überprüfen.

Wir wollen nun an Hand eines Beispiels $H_{+1\,(\mathrm{prog})}$ zunächst nach (30″) berechnen und hernach nach (29″) und die Ergebnisse vergleichen. In Abschnitt 2.2. haben wir bereits nach (30″) eine Vorhersagekarte für das 500 mb-Niveau berechnet. Die dazu benötigten Parameter hatten wir mit

$$\begin{aligned} c &= c_N = 5{,}5\ \mathrm{m/sec}, \\ \Delta s &= (\Delta s)_N = 670\ \mathrm{km}, \\ \Delta t &= 24\ \mathrm{Stunden} \end{aligned}$$

ermittelt. Für unseren Vergleich wählen wir nun im 500 mb-Niveau einen Feldausschnitt von 10° bis 60° westlicher Länge und 35° bis 50° nördlicher Breite. Dieser Ausschnitt entspricht 22 Feldpunkten (Abb. 8). Für diesen beliebig ausgewählten Feldausschnitt wenden wir zur Vorhersage des Geopotentialfeldes das erweiterte Äquivalenzprinzip mit den Parametern:

$$\begin{aligned} c &= 5{,}5\ \mathrm{m/sec}, \\ (\Delta s)i &= 335\ \mathrm{km}, \\ \Delta t &= 24\ \mathrm{Stunden} \end{aligned}$$

an. Daraus folgt nach Abschnitt 2.3.:

$$c_N = 2{,}76 \text{ m/sec (aus } c_N\text{-Diagramm)},$$
$$\frac{\Delta c}{c_N} = 0{,}5,$$
$$B^{(i)} = 2{,}36.$$

Mit Hilfe dieser Werte erhält die Vorhersagegleichung (29″) folgende konkrete Form:

$$H_{+1\,(\text{prog})} = 4.72\, H_0^{(i)} - 2.72\, H_0 - H_{-1}. \qquad (29'')$$

In Abb. 16 werden nun die verschieden voneinander berechneten Werte von $H_{+1\,(\text{prog})}$ miteinander verglichen. In einem rechtwinkeligen Koordinatensystem wurde in Ordinatenrichtung

$$H^{(1)}_{+1\,(\text{prog})},$$

ermittelt mit Hilfe von (30″) (Äquivalenzprinzip), und in Abszissenrichtung $H^{(2)}_{+1\,(\text{prog})}$, berechnet mittels (29″) (Erweiterung des Äquivalenzprinzips), aufgetragen. Theoretisch müssen beide einander entsprechenden Vorhersagewerte gleich sein, d. i.:

$$H^{(1)}_{+1\,(\text{prog})} = H^{(2)}_{+1\,(\text{prog})} \qquad (84)$$

Dies entspricht in der gegebenen Darstellung einer Geraden durch den Koordinatenursprung (strichliert ausgezeichnet) mit einer Neigung von 45°. Die tatsächlich berechneten Werte — jeder Wert entspricht einem Gitterpunkt — weichen von dieser Darstellung nur sehr wenig ab.

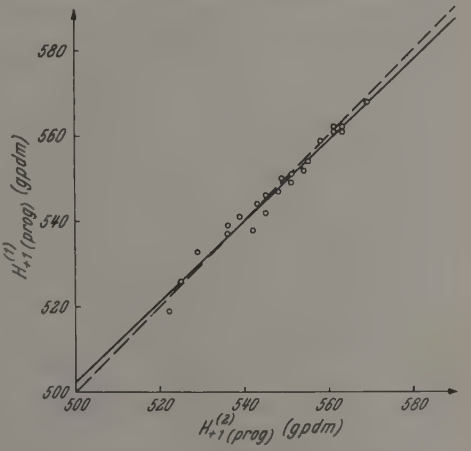

Abb. 16. Vergleich von $H^{(1)}_{+1\,(\text{prog})}$ mit $H^{(2)}_{+1\,(\text{prog})}$. Ausgezogene Linie = Ausgleichsgerade, strichlierte Linie = von der Theorie geforderte Gerade

Als Regressionsgerade (ausgezogene Linie) erhalten wir für das Punktefeld:

$$H^{(1)}_{+1\,(\text{prog})} = 0.95\, H^{(2)}_{+1\,(\text{prog})} + 27.3 \pm 2.0. \qquad (84')$$

Diese Gerade weist im „Punktebereich" nur eine äußerst geringfügige Abweichung von der theoretisch geforderten Geraden (Abb. 16) auf. Die Streuung $\sigma = \pm 2{,}0$ gpdm ist dabei gering.

Ferner wurde noch die Güte der Approximationen $\nabla^2 H \approx \nabla_N{}^2 H$ und $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \approx \frac{\Delta^2 H}{\Delta t^2}$ überprüft. Die Überprüfung, die eine zufriedenstellende

Approximation ergab, erfolgte verhältnismäßig einfach, da wir in unserem Beispiel Rossby-Wellen vorliegen haben und daher die Kriterien (66) und (70) anwenden konnten.

Der Vergleich zwischen den beiden Prognosenmethoden zeigte, daß der Unterschied auch in der Praxis klein ist. Wir können daher für die Vorhersage eines Geopotentialfeldes sowohl das Äquivalenzprinzip von Raum- und Zeitmittel eines solchen Feldes als auch die Erweiterung eines solchen Prinzips verwenden. Dabei wollen wir nochmals die Grenzen einer solchen Prognose, die wir in Abschnitt 2.2. ausführlich diskutiert haben, in Erinnerung rufen.

Literatur

1. Smekal, A.: Statistische und molekulare Theorie der Wärme. Handbuch der Physik, Bd. 9, Theorien der Wärme, S. 175. Berlin: Springer. 1926.
2. Reuter, H.: Grundlagen einer synoptisch-statistischen Theorie der Druckänderungen. Arch. Met. Geoph. Biokl. A **10**, 121 (1958).
3. Fjörtoft, R.: On the Use of Space Smoothing in Physical Weather Forecasting. Tellus **4**, 462 (1955).
4. Courant, R., K. Friedrichs und H. Lewy: Über partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann. **100**, 32 (1928).
5. Charney, J. G.: Dynamic Forecasting by Numerical Process. Compendium of Meteorology, S. 470. Boston, 1951.
6. Charney, J. G., R. Fjörtoft und J. V. Neumann: Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation. Tellus **2**, 237 (1950).
7. Hoiland, E.: On Horizontal Motion in a Rotating Fluid. Geofys. Publ. **17**, No. 10, 1—26 (1950).
8. Huber-Pock, F.: Ein statistisches Verfahren zur Verbesserung und Beschleunigung der graphischen Integration der barotropen Vorticitygleichung. Arch. Met. Geoph. Biokl. A **11**, 38 (1959).
9. Cooley, D. S.: Statistical Forecasting Operators Based on Dynamical Equations. Tellus **10**, 331 (1958).
10. Pichler, H.: Zeitliche und räumliche Mittelbildungen bei Rossby-Wellen. Arch. Met. Geoph. Biokl. A **12**, 8 (1960).
11. Linkes Meteorologisches Taschenbuch, Neue Ausgabe, Bd. 2, S. 495. Leipzig: Geest & Portig K. G. 1953.
12. Reuter, H.: Methoden und Probleme der Wettervorhersage, S. 29. Wien: Springer. 1954.
13. Pichler, H.: Zusammenhang zwischen dem räumlichen und zeitlichen Mittel eines Geschwindigkeitsfeldes in einer autobarotropen Strömung. Arch. Met. Geoph. Biokl. A **11**, 18 (1959).
14. Reuter, H.: Erfahrungen mit einer neuen Methode der Mittelfristprognose. Z. Meteorol. **11**, 299 (1957).
15. Reuter, H.: Über Konstruktion von Vorhersagekarten auf synoptisch statistischer Grundlage. Ber. dtsch. Wetterd. **7**, 96 (1959).

551.515.3(001.5)

Zur Theorie der Tromben

Von

Hans Markgraf

Mit 7 Textabbildungen

Zusammenfassung. Der Verfasser diskutiert die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen, für die Erklärung der Entstehung von Tromben aufgestellten Theorien, die sich teils auf die Annahme thermodynamischer, teils auf die mechanischer Vorgänge stützen.

Summary. The author discusses the probability of the various theories which have been developed for the explanation of tornadoes and waterspouts; they are based on the assumption partly of thermodynamical, partly of mechanical processes.

Résumé. Discussion de la probabilité des diverses théories développées pour l'explication des trombes; elles sont basées sur la supposition de phénomènes soit thermodynamiques soit mécaniques.

Da die Frage nach der Entstehungsursache der Großtromben offenbar noch nicht endgültig gelöst ist, dürfte es vielleicht nicht zwecklos sein, sie erneut zur Diskussion zu stellen. Über den Bau der Großtromben sind wir seit Letzmanns klassischen Untersuchungen [*1*, *2*] gut unterrichtet; über ihre Entstehungsursache gehen jedoch die Meinungen auseinander.

Zwei Theorien stehen sich dabei noch immer gegenüber: die mechanische und die thermodynamische. Sie sollen hier einer kritischen Betrachtung unterzogen werden, um vielleicht neuerdings zu einem Meinungsaustausch über dieses ungelöste Problem anzuregen.

Bei den am Boden entstehenden *Kleintromben* ist die Erklärung einfach. Sie sind entweder reine *Hinderniswirbel*, durch Scherung etwa hinter einer Hausecke entstanden, oder aber *Labilitätswirbel*, die durch das allseitige Zusammenströmen von Luft nach einer Stelle erzeugt wurden, wo in bodennahen Luftschichten mit stark überadiabatischem Temperaturgefälle ein plötzlicher starker Auftrieb erfolgt war.

Bei *Wolkentromben* stößt die Erklärung auf Schwierigkeiten, da ihr Entstehungsort sich unserem unmittelbaren Einblick entzieht. Wir wissen wohl, daß sie meist als Begleiterscheinungen von Gewitterwolken auftreten. Niemand denkt aber heute noch ernstlich daran, etwa die Gewitterelektrizität als ihre Ursache anzusprechen. Auch der für Gewitterwolken kennzeichnende Hagelfall kann kaum eine befriedigende Erklärung für alle Arten von Wolkentromben geben. Denn es gibt Berichte über Tromben, die von gewöhnlichen Cumulus- oder Stratocumulus-Wolken ausgingen [*3, 4*], und andere Berichte, die ein Herabstoßen von Tromben aus stark quellenden, durch Ölfeuer verursachten Rauchfahnen beschreiben [*5, 6*]. In beiden Fällen, bei den Cumulus- wie bei den Rauchwolkentromben, kann von Hagelbildung nicht die Rede sein.

Eins ist allen Trombenberichten jedoch gemeinsam, das Vorhandensein mehr oder weniger starker Quellungen der Mutterwolke. Diese Tatsache muß von der Theorie berücksichtigt werden.

I. Die thermodynamischen Trombentheorien

Betrachten wir zunächst *die thermodynamischen Theorien*, so stellen wir fest, daß sie dem Auftrieb tatsächlich unmittelbar Rechnung tragen. In ihrer ursprünglichen Form liefen sie darauf hinaus, auch die Großtromben entsprechend den als Heißluftstrudel erscheinenden Kleintromben als am Boden entstehende Labilitätswirbel von stark vergrößertem Ausmaß zu erklären. Das tat u. a. bereits FERREL [*7*] in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts und wohl als erster lange vor ihm FRANKLIN 1753. Doch steht das einwandfrei beobachtete Herabsteigen der Tromben aus den Wolken, in denen mehrfach der Beginn des Wirbelns erkannt wurde, bevor sich am Boden irgend eine Bewegung zeigte, sowie das Auftreten von Wasserhosen über den Meeren dieser Erklärungsweise durchaus entgegen. Hinzu kommt, daß wohl in bodennahen Schichten über Land ein stark überadiabatischer Temperaturgradient von 3° auf 100 m entstehen kann, der zum Umsturz führt und nach EXNER [*8*] ein Luftquantum in 100 sec um 61 m und weiterhin mit zunehmender Geschwindigkeit aufsteigen läßt; es ist aber schwer vorstellbar, daß ein solcher Gradient vom Boden bis mindestens zur Wolkenbasis bestehen könnte; sein Vorhandensein wäre jedoch notwendige Voraussetzung für das beschleunigte Emporschießen der Luft bis in große Höhen, das den allseitigen, einen hochreichenden Wirbel erzeugenden Zustrom am Boden veranlaßt. Kleintromben als Heißluftstrudel wachsen niemals in große Höhen, nach A. WEGENER selten höher als mehrere hundert Meter.

Das Aufsteigen der Luft unter einem sommerlichen Cumulonimbus erfolgt in Wirklichkeit — bei Temperaturgradienten in der Größenordnung von einem Drittel des obengenannten Betrages, also bei nahezu trockenadiabatischem Verlauf der Zustandskurve — wesentlich langsamer als bei stark überadiabatischem Gradienten; es erreicht nach EXNER [*8*] bei einem Gradienten von 1,1° auf 100 m in 100 sec 1,7 m

und wächst nach Segelfliegerbeobachtungen an der Wolkenbasis im Mittel auf 2 bis 3 m/sec, in Ausnahmefällen über 5 m/sec an. Bei diesem vergleichsweise langsamen Aufsteigen hat das Luftquantum Zeit, Wärme an die umgebende Luft abzugeben, das Aufsteigen erfolgt also nicht mehr adiabatisch, und statt des plötzlichen Umsturzes stellt sich eine stationäre Vertikalzirkulation ein, die zugleich eine größere Horizontalausdehnung besitzt als jene Heißluftstrudel. Die Voraussetzungen für die Ausbildung hochreichender Aufwindstrudel fehlen demnach unter einem Cumulonimbus.

Zwei Auswege sind versucht worden, um dennoch der thermodynamischen Trombentheorie Geltung zu verschaffen.

Showalter [*9*] nimmt in der Wolke (oberhalb einer Inversion) Schmelzen von Hagel an, um dort das Zustandekommen eines räumlich begrenzten stark überadiabatischen Temperaturgefälles zu erklären, das dann wie bei Kleintromben Anlaß zu plötzlichem starkem Auftrieb und anschließender Wirbelbildung wird; der Wirbel wächst nach unten, ob auch nach oben, darüber wird nichts ausgesagt. Damit ist wohl eine räumliche Begrenzung begründet und der Entstehungsort in die Wolke verlegt; aber die Bildung von Hagel wäre eine Voraussetzung, die zur Erklärung von Cumulus- und Rauchwolkentromben, wie schon gesagt, nicht herangezogen werden kann.

Einen anderen Weg geht Koschmieder [*10*], indem er die Feuchtlabilität zu Hilfe nimmt. Der oberhalb des Kondensationsniveaus durch freiwerdende Kondensationswärme plötzlich gesteigerte Auftrieb aufsteigender Luftmassen soll Anlaß des allseitigen, trombenbildenden Zustroms werden. Auch diese Theorie verlegt mithin den Entstehungsort in die Wolke, wahrscheinlich in deren unterste Partien, und sie benötigt keine Hagelbildung. Schwierig bleibt jedoch einzusehen, warum die Trombenbildung dann nur an einer oder mehreren bevorzugten Stellen erfolgt. Allerdings ist aus Erfahrungen der Segelflieger bekannt, daß das Aufsteigen der Luft im Cumulonimbus nicht über die ganze Breitenausdehnung der Wolke hin gleichmäßig erfolgt, sondern besonders kräftig in einem oder mehreren „Aufwindschloten". So gesehen wäre eine Großtrombe nach Koschmieder dann die untere Verlängerung eines Aufwindschlots. Das aber erscheint wieder unwahrscheinlich. Denn einmal dürfte der Durchmesser des Aufwindschlots größer sein als der Trombendurchmesser, und sodann treten die Tromben gewöhnlich im Randgebiet der Wolke auf, nicht gerade dort, wo man einen Aufwindschlot in erster Linie vermuten müßte. Und warum hat dann nicht jeder Cumulus, mindestens aber jeder Cumulonimbus seine Trombe? Eine einzelne Beobachtung scheint diese Theorie doch zu stützen. So gut wie die Trombe nach der Theorie von ihrem Entstehungsort aus nach unten wächst, müßte sie auch nach oben wachsen können; die Heißluft-Kleintromben wachsen ja auch nach oben. Ein oberer Teil der Großtrombe wird natürlich im allgemeinen durch die Wolke verborgen, wenn deren Turbulenz ihn überhaupt zustandekommen läßt. Immerhin berichtet E. M. Brooks [*11*] von einer Beobachtung, wo in einem Fall

in Abilene (Texas) im Juni 1938 eine bemerkenswert starke Aufwärtsströmung bezeugt ist, als ein Tornado seinem Cumulonimbus in die Höhe vorauseilte und dabei sofort einen neuen Cumulonimbus bildete, der innerhalb einer Minute bis zu einer Höhe von 10,5 km emporschoß.

Doch ist dies ein Einzelfall[1] und bei den Beobachtungen von Cumulus- und Rauchwolkentromben, wo die Partien oberhalb der wenig mächtigen Wolken ungehindert eingesehen werden können, zeigt sich keine derartige „obere" Trombe; daß bei den Rauchwolkenquellungen überhaupt Feuchtlabilität mitgewirkt hätte, ist sowieso kaum anzunehmen.

Es ist nicht verwunderlich, daß auch die genau entgegengesetzte Erscheinung, nämlich ein starker *Abwind* als Anlaß der Trombenbildung in Betracht gezogen worden ist. Legt doch der Auslaufstrudel über der Bodenöffnung eines Wassergefäßes diesen Gedanken nahe. Auch hier muß ja das Massendefizit durch allseitiges Zuströmen ersetzt werden, das bekanntermaßen zur Wirbelbildung führt, sobald nur vorher eine Bewegung in dem Medium erzeugt wurde, was im allgemeinen nicht rotationsfrei (im mathematisch-physikalischen Sinne) erfolgen kann. Daß ein solcher Vorgang auch in der Atmosphäre vorkommen kann, ist nicht von der Hand zu weisen. Ein überadiabatischer Temperaturgradient der umgebenden Luft läßt ja nicht nur ein einmal angehobenes Luftquantum beschleunigt immer weiter steigen, es beschleunigt ebenso immer weiter auch den *Abstieg* eines einmal nach unten in Bewegung gesetzten Luftquantums. Nur der erste Anlaß zur Abwärtsbewegung scheint hier schwerer erklärbar als der erste Anstoß zum Auftrieb. Mitreißen der Luft durch fallenden Starkregen oder Hagel [*12*], Bildung eines später herabstürzenden Kaltluftkissens in der Wolke durch Schmelzen fester Kondensationsprodukte [*13, 14*] oder durch Verdunsten von Niederschlag unter der Wolke scheidet für eine allgemeine Erklärung freilich aus, jedenfalls bei Cumulus- und Rauchwolkentromben. Müssen aber nicht den Aufwindströmen der Quellwolken Abwindströme entsprechen, die sie kompensieren? Tatsächlich erfolgt eine Abwärtsbewegung der Luft nicht nur, oft deutlich sichtbar, am Außenrand der Quellwolke, sondern, wie fliegerische Erfahrung lehrt, auch innerhalb der Wolke und dort wohl noch konzentrierter als am Rande. Auch hier bleibt freilich die Frage offen, weshalb Tromben dann nicht öfter auftreten [*15*].

II. Die mechanischen Trombentheorien

A. WEGENER [*16*] hat die Großtromben als zum Erdboden herabgebogene Enden eines in der Wolke durch Scherung in der Vertikalen entstandenen Mutterwirbels mit horizontaler Achse gedeutet und glaubte das seitliche Streufeld jenseits des Cumulonimbus dadurch erklären zu

[1] Einen zweiten Fall von Aufwärtswachsen einer Trombe, und zwar aus einer Stratocumulus-Schicht, berichtet W. HARTMANN [*3*]. Eine Verlängerung nach unten gab es dabei aber bestimmt nicht, wie *vielleicht* auch nicht bei dem von BROOKS beschriebenen Tornado.

können. Danach müßten die Tromben paarweise auftreten, wofür WEGENER selbst keine überzeugenden Belege beibringen konnte; im Gegenteil erscheinen Großtromben meist vereinzelt oder sonst reihenweise. Vor allem aber kann schon das Grundschema nicht zutreffen, worauf KOSCHMIEDER ([*10*], S. 18) aufmerksam gemacht hat. Tromben sind — jedenfalls über Land — immer mit starken Aufwärtsbewegungen verbunden, und es „ist nicht einzusehen, wo die von *beiden* Tromben aufwärts geschaffte Luft innerhalb des horizontalen Mutterwirbels verbleibt".

Dem Schema widersprechen auch die Beobachtungen sowohl der Cumulus- wie der Rauchwolkentromben. *Trombenreihen* passen ebensowenig dazu und doch werden sie über See oft beobachtet.

Zu den mechanischen gehört im Grunde genommen auch die HARTMANNsche Trombentheorie [*3*]. HARTMANN nimmt an, daß ein Vertikalstrom mit kreisförmigem Querschnitt durch einen beschleunigten Horizontalstrom im Altostratusniveau in Rotation versetzt wird. Lenticulariswogen an einer Sperrschicht sollen dabei das horizontale Stromfeld widerspiegeln. Es ist schwer vorstellbar, wie die vertikale Stromröhre als Ganzes in Rotation geraten soll. Auch liegt der Ort des Rotationsantriebs für die Großtromben sicher nicht im Altostratusniveau.

Es bleibt noch eine Theorie übrig, bei der die WEGENERsche Theorie Pate gestanden hat. Ausgehend von der Beobachtungstatsache, daß alle Arten von Wolkentromben aus Quellwolken herabkommen — auch die Qualmwolken der Ölbrände weisen mindestens in Herdnähe zweifellos starke Quellungen auf — wird der Gedanke entwickelt, daß die Tromben gleichsam als eine Art Hinderniswirbel hinter dem Quellturm, insbesondere hinter einem Aufwindschlot entstehen, sobald dieser in eine obere Luftströmung hineinwächst, die größere Geschwindigkeit besitzt als die Luftströmung an der Cumulonimbusbasis (vgl. auch [*17*]). Das ein Hindernis bildende Medium größerer Dichte, also größerer Trägheit, sind zunächst einmal die Wassertröpfchen der Wolke. Durch sie wird der auf die Wolke treffende horizontale Luftstrom abgestoppt und, insoweit er in die Wolke eindringt, verlangsamt. Natürlich wird es sich dabei um keine großen Beträge handeln. Bremsend wirkt aber außerdem auch der starke, dem Horizontalstrom in den Weg tretende Vertikalstrom. Seitlich geht der horizontale Luftstrom ungestört geradeaus weiter. So können Hinderniswirbel entstehen, die allerdings geringere Energie besitzen werden, als es hinter einem festen Hindernis der Fall wäre, da der Bewegungsunterschied gegenüber der ungestörten Strömung wohl nicht so groß ist. Hinzu kommt nun noch der Umstand, daß oberhalb des Kondensationsniveaus durch freiwerdende Kondensationswärme der unterhalb bereits vorhandene Auftrieb plötzlich *vermehrt* wird. Das dadurch in der untersten Wolkenschicht entstehende Massendefizit wird den anfänglich gebildeten Hinderniswirbel veranlassen, sich in die Wolke hinein auszudehnen. Er schöpft seine Energie nunmehr sowohl aus der ungestörten Horizontalströmung als auch aus dem Auftrieb. Natürlich könnte die gleiche Erscheinung auch durch einen konzentrierten Abwindstrom veranlaßt werden,

und zwar dort einsetzen, wo die Abwärtsbeschleunigung ein kritisches Maß überschreitet. Dieser Vorgang mag ebenfalls am unteren Wolkenrand erfolgen; denn auch hierbei spielt die Feuchtlabilität eine Rolle. Die beim Abstieg erfolgende adiabatische Erwärmung wird durch Verdampfen der Wolkentröpfchen teilweise wieder ausgeglichen, die Temperaturdifferenz zwischen Luftquantum und umgebender Luft, die zunächst geringer werden wird und in einer bestimmten Höhe ganz verschwindet, wird von da an mit umgekehrtem Vorzeichen wieder wachsen und an der Untergrenze der Wolke besonders groß werden, wo noch die letzten Tröpfchen in der hier sicher trockenadiabatisch geschichteten Luft verdunsten. Das durch den so beschleunigten Abstieg entstehende Massendefizit veranlaßt wiederum den Hinderniswirbel, sich in die Wolke hinein auszudehnen.

Wir haben es bei dieser Theorie also mit einer Kombination kinematischer und thermodynamischer Ursachen zu tun. Mit ihr stimmt die Beobachtung überein, daß Tromben gewöhnlich im Randgebiet der Quellwolken auftreten. Die Einbeziehung der Vertikalbewegung in die Trombenbildung fesselt die Wirbel an die Wolke. Sie können sich nicht leicht wie echte Hinderniswirbel von dem Hindernis ablösen. Es ist auch erklärlich, daß nur *ein* Wirbel hinter einem Aufwind- oder Abwindschlot entstehen kann, da der zuerst entstandene in diesen hineinwächst und die Ausdehnung eines zweiten gegenläufigen Wirbels verhindert. Wohl aber können aus einem ausgedehnten Wolkenbereich hinter weiteren neu entstehenden Aufwindschloten weitere Trombenwirbel entstehen, deren Rotation gleich- oder gegensinnig sein kann. Auf diese Weise lassen sich sowohl einzelne als auch Reihentromben erklären, und wenn HISSONG [5] bei den kalifornischen Rauchwolkentromben beiderlei Drehsinn beobachtet hat, so steht das in keinem Widerspruch zu der Theorie. Auch die Beobachtung der aus dem Cumulonimbusgipfel herausragenden Trombe läßt sich zwanglos einordnen: der Anfangswirbel ist hinter dem Aufwindschlot auch nach oben gewachsen, bis er schließlich oberhalb der Wolke sichtbar wurde. Eine Beobachtung von LETZMANN an Wasserquellungen scheint diese Theorie zu stützen. In seinem Buch über „Tromben im ostbaltischen Gebiet" [2] schreibt er:

„Der zweite Typus, der meines Erachtens zur Erklärung der Trombenbildung eher in Betracht kommt, entsteht überall an der Grenze aufquellender Wassergebiete. Es tritt von der Mitte dieses Gebietes ein deutliches Abströmen des Wassers zum Rande, verbunden mit einer *absteigenden Bewegung* am Rande dieses ‚Wassercumulus' ein, so daß sich die Grenzlinie durch eine scharfe Wasserstufe auf der Oberfläche bezeichnet. Neben dieser Grenzlinie, d. h. genauer etwas weiter vom Zentrum als sie, treten regelmäßig kleine scharf ausgeprägte Wirbel auf, die, meist hintereinander herschreitend, unseren Tromben sehr ähnlich sind, mit dem aufquellenden Wasserstrom weiterziehen und erst dann entstehen, wenn das Herabsinken des Wassers an der äußeren Cumulusgrenze schon bis zu einer gewissen Tiefe vorgedrungen ist. Als Folge des gleichfalls seitlichen Auseinanderströmens dieser Wasser-Cu ist die Verschiebung der oberen Wirbelspur von der Mitte weg aufzufassen, und es liegt nahe, anzunehmen, daß die Wirbelachse aus dem gleichen Grunde überhaupt

eine Neigung zum aufquellenden Gebiet hin aufweisen wird. Sie unterscheiden sich von den Wirbeln erster Art, deren Bewegung nach außen hin allmählich abnimmt, dadurch, daß sie in ihrem Jugendstadium durch eine Gleitschicht von der Umgebung getrennt sind und nebeneinander einherziehen können, während vor dem Verschwinden das Rotationsfeld nach außen hin zunimmt, wodurch die Wirbel unruhig werden und um einander zu rotieren beginnen, was nach A. Wegener ebenfalls vor dem Verschwinden der Tromben häufig auftritt. Diese Wirbel können sowohl anti- als auch, häufiger, zyklonal rotieren und erinnern in ihrer reihenweisen Bewegung stark an die parallel ziehenden Schwestertromben der Atmosphäre. Dem aufquellenden Gebiet würde ein Cu entsprechen, der in eine Windschicht eindringt."

An dieser Schilderung von Letzmann ist bemerkenswert, daß die Wirbel offenbar an eine absteigende Bewegung gebunden sind, aber nicht in ihr, sondern seitlich davon auftreten. Sie wirken durchaus wie Hindernisnebel, wobei aber die Vertikalbewegung offenbar das auslösende Moment darstellt.

Allen ganz oder teilweise mechanischen Trombentheorien gemeinsam ist die wesentliche Beteiligung der horizontalen Strömung am Zustandekommen der Tromben. Damit ist ein Faktor eingeführt, der die Seltenheit der Erscheinung erklärlich machen kann. Das Größenverhältnis zwischen Horizontal- und Vertikalstrom wird einen kritischen Wert überschreiten müssen, damit es zur Trombenbildung kommt; allerdings bringt keine der Theorien quantitative Angaben darüber.

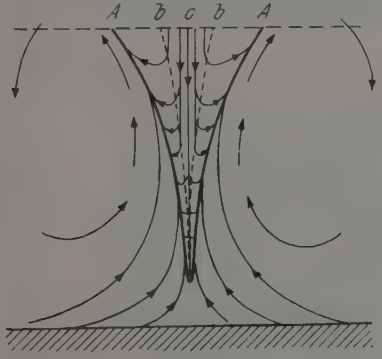

Abb. 1.

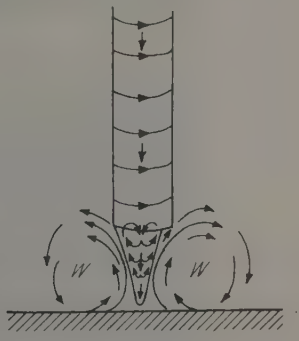

Abb. 2.

Abb. 1. Schema der Vertikalzirkulation einer Windhose nach Letzmann. Die Trichterform ist eine Wirkung der Bodenreibung, der Wirbel baroklin. Es gibt Bilder einer Trombe, die vom Boden bis zur Wolke diese Trichterform zeigt. Im allgemeinen beschränkt sich aber die Trichterform auf das untere Ende der Trombe, also auf den aus der Wolke hervorstoßenden Zapfen (wegen geringerer Reibung in gestreckterer Form) und, bei einer voll entwickelten Trombe, auf den Fuß, der bei Windhosen größere Mächtigkeit zu haben pflegt als bei Wasserhosen. Zu beachten ist auch die seitliche Zirkulation mit horizontaler Achse

Abb. 2. Schema der Luftzirkulation einer Wasserhose nach Letzmann. Über dem baroklinen Gischtfuß der barotrope säulenförmige Teil der Trombe

Hiermit sind die verschiedenen Theorien zur Erklärung der Tromben erneut zur Diskussion gestellt. Es besteht natürlich auch die Möglichkeit, daß auch in der Atmosphäre mehrere Arten von Wirbeln verschiedenen Ursprungs auftreten, wie es im Wasser Hinderniswirbel, Auslaufstrudel und Mahlströme gibt.

In den Abb. 3 bis 7 ist eine Reihe instruktiver Wasserhosenbilder wiedergegeben, die von einem Segler, Herrn SOMMER, am 1. August 1959 vor Großenbrode (an der Holsteinischen Ostseeküste gegenüber Fehmarn) aufgenommen

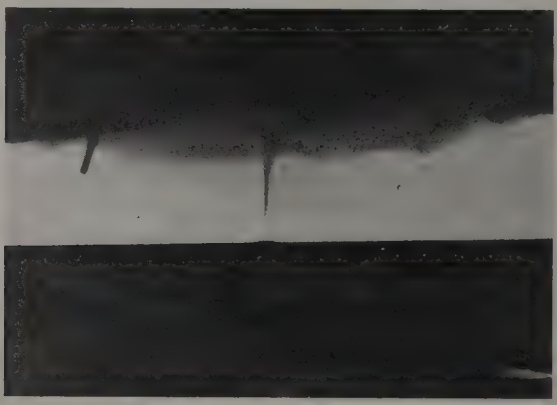

Abb. 3. Die erste der Großenbroder Tromben. Gischtfuß und trichterförmige Trombenwurzel an der Wolke sind deutlich zu erkennen

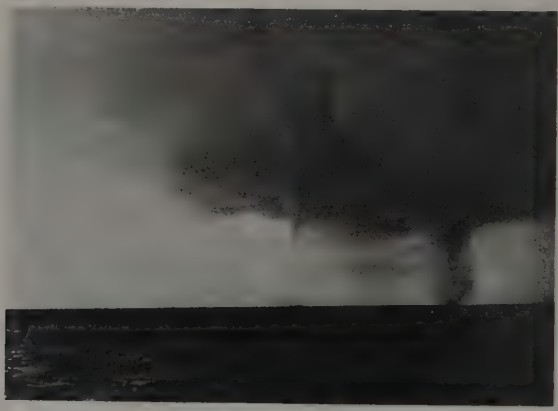

Abb. 4. Der Trichter ist mächtiger geworden. Auch der Gischtfuß ist gewaltiger. Links davon eine zweite Wasserhose. Der Trichteransatz an der Wolke und der noch niedrige Gischtfuß darunter sind erkennbar. im Mittelstück hat die Luftverdünnung noch nicht zur Kondensation geführt

wurden und den Gestaltwechsel der Tromben besonders eindrucksvoll zeigen. Zum Vergleich sind in Abb. 1 und 2 zwei schematische Aufrißzeichnungen von LETZMANN [1] beigefügt. Die Blickrichtung bei den Trombenphotographien ist gegen Süd, und die Tromben zogen nach Angabe des Beobachters

Abb. 5. Über dem trichterförmigen Fuß der ersten Wasserhose erscheint jetzt ein größeres säulenförmiges Stück. Die zweite Trombe ist nun auch fast in ihrer ganzen Länge sichtbar geworden. Das Fährschiff „Theodor Heuß", das gestoppt hatte, setzt seine Reise fort, da die Trombenbahnen seinen Kurs offenbar nicht kreuzen werden

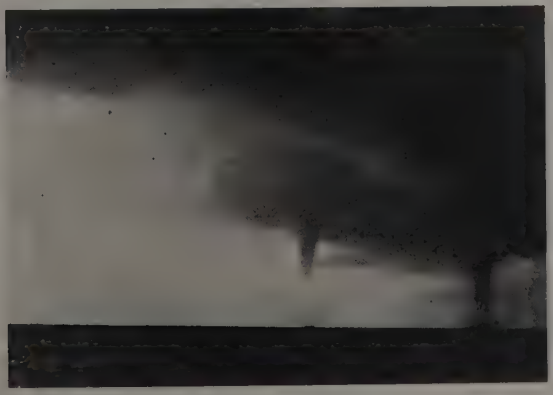

Abb. 6. Eine dritte Trombe (oben ganz links im Bild) ist erschienen, viel schmäler als die vorhergehenden. Das Ende des sichtbaren Teils der zweiten Trombe scheint gespalten zu sein. Dort wird die hellere Seele des Trombenschlauchs erkennbar, in der die Kondensation durch absteigende Luftbewegung aufgelöst ist. Um den dichten säulenförmigen Kern der ersten Trombe zeichnet sich schleierhaft ein äußerer Zylinder ab

wie die Gewitterwolke nach Nordost (auf den Bildern also nach links). Der Bodenwind war schwach nordöstlich bis östlich. Drei der Tromben entstanden nacheinander, jede folgende in Zugrichtung weiter vorn.

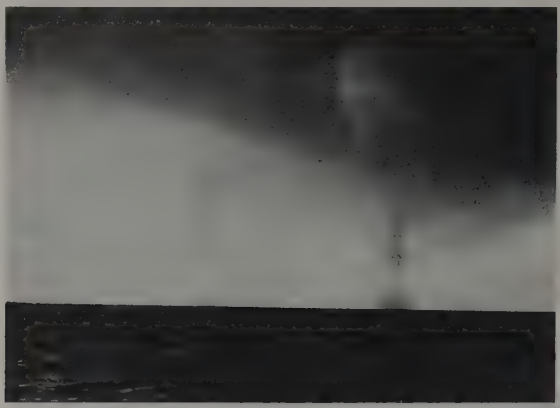

Abb. 7. Das Bild zeigt nur die beiden zuerst entstandenen Tromben. Bemerkenswert die bogenförmigen seitlichen Ansätze in halber Höhe der ersten Trombe. Dort scheint ein Wirbelring durch Kondensation teilweise sichtbar zu werden, dessen Zirkulation etwa der seitlichen Zirkulation mit horizontaler Achse in Abb. 1 entspricht

Literatur

1. LETZMANN, J.: Das Bewegungsfeld im Fuß einer fortschreitenden Wind- und Wasserhose. Acta Comm. Univ. Dorpat. A VI 3 (1923).
2. LETZMANN, J.: Tromben im ostbaltischen Gebiet. Sitzungsber. Naturforsch. Ges. Univ. Dorpat XXVIII (1921).
3. HARTMANN, W.: Beiträge zu einer Theorie der Tromben. Met. Z. **41**, 101 (1924).
4. MARKGRAF, H.: Drei Trombenberichte. Ann. Hydr. mar. Met. **57**, 14 (1929).
5. HISSONG, J. E.: Whirlwinds at Oil-Tank-Fire, San Luis Obispo, Calif. Mon. Weath. Rev. **54**, 161 (1926).
6. MARKGRAF, H.: Wasserhosenbildung aus einer Rauchfahne. Ann. Hydro. mar. Met. **69**, 28 (1941).
7. FERREL, W.: Annual Report of the Chief Signal Officer 1885. Appendix 71. Recent Advances in Meteorologie, S. 287. Washington, 1886.
8. EXNER, F. M.: Dynamische Meteorologie, 2. Aufl., S. 51. Wien, 1925.
9. SHOWALTER, A. K.: Preliminary Report on Tornados. The Tornado - An Analysis of Antecedent Meteorological Conditions. U.S. Weather Bureau (1943).
10. KOSCHMIEDER, H.: Über Tromben. Reichsamt Wetterd. Wiss. Abh. VI, 3 (1940).

11. Brooks, E. M.: Tornadoes and Related Phenomena. Compendium of Meteorology. Amer. Met. Soc. Boston, Mass., 1951.

12. Rossmann, F.: Über Wolkentromben. Ann. Met. **4**, 48 (1951).

13. Mügge, R.: Zur Entstehung der Tromben. Met. Z. **44**, 411 (1927).

14. Faust, H.: Kaltfronten und Gewitter. Ber. Dtsch. Wetterd. US-Zone, Nr. 24 (1951).

15. Wagner, F.: Mammatusformen als Anzeichen für Absinkbewegung in Wolkenluft. Ann. Met. **1**, 336 (1948).

16. Wegener, A.: Beiträge zur Mechanik der Tromben und Tornados. Met. Z. **45**, 201 (1928).

17. Markgraf, H.: Ein Beitrag zu Wegeners mechanischer Trombentheorie. Met. Z. **45**, 385 (1928).

551.509.3:551.543.5

(Université de Bruxelles)

De l'efficacité des prévisions à courte et moyenne échéances de la pression atmosphérique, basées sur des informations locales de la pression

Par

P. Lelouchier[1]

Avec 4 Figures

Résumé. L'auteur examine les fondements de la prévision de la pression à courte et moyenne échéances, basée sur des autocorrélations (Vialar) et des corrélations locales de la pression ainsi que sur l'utilisation de moyennes glissantes de la pression atmosphérique (Grappe).

Pour apprécier la qualité d'une prévision de la pression, il introduit la notion d'efficacité. Cette notion est liée à la prévision du signe de la variation de la pression.

L'auteur montre que la méthode des équations autorégressives ne conduit pas à une prévision efficace de pressions moyennes, tandis que celle des équations de régression locale, appliquée aux moyennes glissantes de la pression journalière, fournit une prévision efficace de la pression moyenne de plusieurs jours (2 à 5 jours). Cependant, l'efficacité de cette dernière prévision est illusoire, car elle ne résulte que des propriétés algébriques des moyennes glissantes.

L'auteur remarque que l'échec de ces méthodes de prévision coïncide avec le manque d'autorégressivité de la série chronologique de la variation de la pression journalière. De ce fait, il est peu vraisemblable qu'une quelconque méthode de prévision de la pression atmosphérique, à courte ou moyenne échéance, basée sur des informations locales de la pression, puisse conduire à des prévisions efficaces non illusoires lorsque la série chronologique de la variation première de la pression n'est pas autorégressive.

Zusammenfassung. Es werden die Grundlagen der kurz- und der mittelfristigen Luftdruckprognosen untersucht, die auf Autokorrelationen (Vialar) und lokalen Korrelationen des Druckes, sowie auf der Verwendung gleitender Mittel des Luftdruckes (Grappe) beruhen.

[1] Titulaire d'un mandat d'Aspirant du Fonds National de la Recherche Scientifique.

Zur Abschätzung der Qualität einer Luftdruckprognose wird der Begriff der „Treffsicherheit" (efficacité) verwendet. Dieser Begriff beruht auf der Vorhersage des Zeichens der Druckänderung.

Es wird gezeigt, daß die Methode der Autoregressionsgleichungen nicht zu einer treffsicheren Vorhersage des mittleren Druckes führt, während die der Gleichungen der lokalen Regression, wenn sie auf gleitende Mittel des täglichen Druckes angewandt wird, eine zuverlässige Vorhersage des Druckes im Mittel über mehrere Tage (zwei bis fünf Tage) gestattet. Indessen ist die Wirksamkeit dieser letzteren Prognose nur scheinbar, da sie nur auf den algebraischen Eigenschaften der gleitenden Mittel beruht.

Das Versagen dieser Vorhersagemethoden fällt zusammen mit dem Fehlen einer Autoregression der Zeitreihen der täglichen Druckänderungen. Es ist daher wenig wahrscheinlich, daß irgendeine Vorhersagemethode des Luftdruckes für kurze oder mittlere Zeiträume, welche auf lokalen Beobachtungen des Druckes beruht, zu tatsächlich zuverlässigen Vorhersagen führen kann, wenn die Zeitreihe der ersten Differenzen des Luftdruckes nicht autoregressiv ist.

Summary. The author investigates the bases of a short or medium range pressure forecast, based on autocorrelations (Vialar) and local correlations of pressure as well as on the use of running time means of atmospheric pressure (Grappe).

In order to appreciate the degree of quality of a forecast, he introduces the concept of efficiency. This concept is based on the forecast of the sign of the pressure variation.

The author points out that the method of autoregressive equations does not lead to an efficient forecast of pressure averages, whilst that of local regression equations, applied to the running means of daily pressure, gives an efficient forecast of pressure averages over a time interval of several days (2 to 5 days). The efficiency of this latter forecast, however, is illusive, this efficiency being a result of the algebraic properties of the running means only.

The author notices that the failure of the forecast methods coincides with the lack of autoregressivity of time-series of daily pressure variation. Therefore, it is very unlikely that any method of short or medium range pressure forecast, based on local pressure data, can produce really efficient forecasts if the time series of the first variation of pressure is not autoregressive.

1. Introduction

En météorologie, les prévisions à courte échéance (24 heures ou moins) et à moyenne échéance (2 à 5 jours) sont habituellement basées sur des procédés permettant de prévoir la topographie des surfaces isobares standards. Ces procédés comportent des extrapolations synoptiques qui sont fondées sur les lois régissant les variations temporelles et spatiales de la pression atmosphérique.

A côté de ces méthodes de prévision à base physique, certains auteurs (Grappe, Vialar) ont pensé qu'il est peut-être possible de prévoir des cartes de pression à partir d'informations purement *locales*.

Vialar ([4], tome IV, p. 106) a notamment émis l'opinion selon laquelle « il semble que l'on pourrait utiliser la méthode des équations autorégressives pour la prévision des cartes d'isobares en surface (et aussi pour celle des cartes de lignes de niveau des surfaces isobares stan-

dards) à échéance de 24 heures ». Bien que cette méthode développée par VIALAR paraisse acceptable à première vue, nous montrons que les résultats qu'elle fournit ne peuvent être considérés comme satisfaisants en raison de l'absence *d'efficacité* de la prévision de la pression atmosphérique moyenne. Cette divergence de vue tient à ce que VIALAR n'a pas envisagé la notion d'efficacité, pourtant essentielle en prévision météorologique.

D'autre part, nous examinons d'une façon générale la possibilité d'effectuer des prévisions à moyenne échéance à l'aide d'informations purement locales. En particulier, nous montrons que si les résultats obtenus par l'emploi de moyennes glissantes sont intéressants, ils doivent cependant être interprétés avec la plus grande prudence.

2. Du prolongement des séries de moyennes glissantes

Les moyennes glissantes sont fréquemment utilisées dans certaines techniques de prévisions météorologiques (voir notamment GRAPPE [*1*]). Pour cette raison, il est utile de poser de manière générale, le problème du prolongement de séries de moyennes mouvantes.

La méthode des moyennes glissantes est généralement employée pour faire ressortir les variations à plus ou moins « longue période » (pseudo-période) d'une série observée, et le choix du type de moyenne utilisée est lié aux variations que l'on veut faire ressortir. Toutefois, en pratique, pour éviter des calculs trop longs, on se limite souvent à employer des moyennes arithmétiques simples ou itérées un certain nombre de fois.

Quels que soient les types de moyenne utilisés, il convient d'être prudent lors de l'interprétation des résultats obtenus. On sait, en effet, que le calcul des moyennes introduit une organisation (smoothing) totalement étrangère aux propriétés initiales de la variable originale. En particulier, si les séries engendrées par les moyennes glissantes d'une série purement aléatoire se présentent elles-mêmes comme des lignes de tendance aux oscillations relativement régulières (KENDALL [*2*], VIALAR [*4*]), il n'en résulte cependant pas que l'emploi d'une telle moyenne glissante puisse combler de quelque manière que ce soit le manque d'informations qui affecte les valeurs futures de la variable aléatoire considérée. Il s'ensuit que si l'on considère la série des moyennes glissantes dérivées d'une série purement aléatoire, toute prévision que l'on pourrait faire sur les prochaines valeurs, de la moyenne glissante ne peut être qu'un reflet des propriétés algébriques du procédé lui-même.

Montrons par ailleurs qu'une telle prévision est possible. A cet effet, considérons la série des moyennes glissantes calculées sur a termes consécutifs d'une série purement aléatoire. Il est clair que, dans ce cas, la série des moyennes glissantes comportera au total $(a—1)$ termes de moins que la série initiale; toutefois, un prolongement de la série des moyennes glissantes reste possible avec, cependant, une imprécision croissante.

Pour illustrer ce fait, et en raison de son utilité pour la suite de l'exposé, considérons par exemple la série Tn_i de la variable purement

aléatoire s_i (variable aléatoire quelconque de moyenne nulle):

$$Tn_i = \frac{1}{n^2} \sum_{j=i-n}^{i-1} \sum_{k=j+1}^{j+n} s_k = \frac{1}{n^2}(s_{i-n+1} + 2s_{i-n+2} + \ldots + j s_{i-n+j} + \ldots + n s_i + \ldots + s_{i+n-1}), \quad (2.1)$$

et montrons que pour les n prochaines valeurs de i, il est possible de prévoir les valeurs de la moyenne glissante Tn_i ainsi que le sens de sa pente, la position de ses extremums et l'orientation de sa courbure.

Pour la facilité du calcul, il est équivalent de considérer l'expression glissante :

$$Sn_i = \sum_{j=i}^{i+n-1} \sum_{k=j+1}^{j+n} s_k = n^2 Tn_{i+n}. \quad (2.2)$$

En utilisant les notations du calcul des différences, par sommation membre à membre de l'identité,

$$\Delta^1 i = \Delta^1 i_{-1} + \Delta^2 i_{-1}, \text{ pour } i \text{ entier}, \quad (2.3)$$

on obtient successivement :

$$\Delta^1 i_{+j-1} = \Delta^1 i_{-1} + \sum_{k=0}^{j-1} \Delta^2 i_{-1-k}, \quad (2.4)$$

et

$$\sum_{l=0}^{j-1} \Delta^1 i_{+l} = j\Delta^1 i_{-1} + \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{l} \Delta^2 i_{-1+k}. \quad (2.5)$$

D'autre part, on vérifie directement que :

$$\Delta^2 Sn_{i-1} = s_i - 2s_{i+n} + s_{i+2n}. \quad (2.6)$$

On en déduit à l'aide de (2.5) :

$$Sn_{i+j} = Sn_i + j(Sn_i - Sn_{i-1}) + \sum_{k=0}^{j-1} (j-k)(s_{i+k} - 2s_{i+n+k} + s_{i+2n+k}), \quad (2.7)$$

tandis que de (2.4) il vient :

$$\Delta^1 Sn_{i+j-1} = Sn_i - Sn_{i-1} + \sum_{k=0}^{j-1} (s_{i+k} - 2s_{i+n+k} + s_{i+2n+k}). \quad (2.8)$$

Notons encore que la relation (2.6) peut également s'écrire :

$$\Delta^2 Sn_{i+j-2} = s_{i+j-1} - 2s_{i+n+j-1} + s_{i+2n+j-1}. \quad (2.9)$$

Supposons maintenant que la première valeur inconnue de s_k soit celle pour laquelle $k = i + 2n$; les dernières valeurs connues exactement de Sn_i, de sa différence première et de sa différence seconde sont donc respectivement Sn_i, $\Delta^1 Sn_{i-1}$ et $\Delta^2 Sn_{i-2}$.

Choisissons comme estimation des valeurs ultérieures de ces fonctions celle pour laquelle on a attribué à s_k sa valeur moyenne qui a été supposée nulle, $s_k = 0$ pour $k \geq i + 2n$. Il en résulte que les relations (2.7), (2.8) et (2.9) permettent de déduire des estimations des valeurs ultérieures de ces fonctions (en particulier pour $j = 1$ à n).

Une mesure de la qualité du prolongement de l'expression glissante pour $1 \leqq j \leqq n$, est fournie par les coefficients de corrélation entre les fonctions considérées et leurs estimations[1, 2] :

$$\rho\,[S n_{i+j}, e\,(S n_{i+j})] = \sqrt{\frac{n\,(4n^2+2) - j\,(2j^2+3j+1)}{n\,(4n^2+2)}}, \qquad (2.10)$$

$$\rho\,[\Delta^1 S n_{i+j}, e\,(\Delta^1 S n_{i+j})] = \sqrt{\frac{2n-j}{2n}}, \qquad (2.11)$$

et

$$\rho\,[\Delta^2 S n_{i+j}, e\,(\Delta^2 S n_{i+j})] = \sqrt{\frac{25}{30}}. \qquad (2.12)$$

Un autre aspect de la qualité du prolongement est celui des probabilités d'estimation correcte du signe de $S n_{i+j}$, $\Delta^1 S n_{i+j}$ et $\Delta^2 S n_{i+j}$. Dans l'hypothèse de normalité de chacune des variables aléatoires à deux dimensions $[S n_{i+j},\ e\,(S n_{i+j})]$, $[\Delta^1 S n_{i+j},\ e\,(\Delta^1 S n_{i+j})]$ et $[\Delta^2 S n_{i+j},\ e\,(\Delta^2 S n_{i+j})]$, on peut calculer ces probabilités à partir des coefficients de corrélation (2.10) à (2.12) en utilisant les tables de PEARSON ([3], vol. 2, p. 78—109). En particulier, les résultats numériques relatifs au cas où $n = 5$ figurent au Tableau 1.

Tableau 1. *Valeur des coefficients (2.10), (2.11) et (2.12) pour $n = 5$. Probabilités d'estimation correcte du signe $S5_{i+j}$ (1), de $\Delta^1 S5_{i+j}$ (2) et de $\Delta^2 S5_{i+j}$ (3)*

j	(2,10)	(1)	(2.11)	(2)	(2.12)	(3)
1	.99	.98	.95	.90	.91	.86
2	.97	.94	.89	.85	.91	.86
3	.91	.86	.84	.82	.91	.86
4	.80	.80	.78	.79	.91	.86
5	.59	.70	.71	.75	.91	.86

On voit donc que la connaissance de la structure algébrique de la moyenne glissante permet, dans le cas considéré, de déterminer avec une précision décroissante avec j, l'allure générale du prolongement de l'expression linéaire glissante $S5_{i+j}$ pour $j = 1, \ldots, 5$, ou ce qui revient au même de la ligne de tendance $T5_k$ pour $(i+6) < k < (i+10)$.

[1] D'une manière générale, le symbole $e(\ )$ désigne la valeur estimée de la variable entre parenthèses.

[2] Le calcul de ces expressions est élémentaire, il nécessite l'utilisation de la formule $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k}{6}(2k^2 + 3k + 1)$.

et ce en l'absence de toute information sur les prochaines valeurs de la variable aléatoire s_k[1].

Tableau 2. *Valeurs des coefficients (2.10) pour $n = 2, 3, 4$ et 5*

j	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	.91	.97	.99	.99
2	.41	.86	.94	.97
3		.51	.83	.91
4			.56	.80
5				.59

De plus, si on considère les valeurs des coefficients de corrélation (2.10), pour $n = 2, \ldots, 5$ (Tableau 2), on constate que ces coefficients de corrélation sont élevés (≥ 0.8) pour $j = 1, \ldots, (n - 1)$ et qu'ils présentent tous une décroissance importante de $j = n - 1$ à $j = n$.

Il en résulte que, de façon générale, si la variable initiale n'est pas une variable aléatoire pure, mais possède des propriétés de persistance, l'emploi de moyennes glissantes superpose à la persistance naturelle une persistance artificielle d'origine algébrique. L'étude de séries chronologiques au moyen de telles moyennes complique inutilement donc les problèmes de prévision.

3. Documents statistiques

Les résultats numériques présentés dans ce travail ont été calculés à partir des documents statistiques publiés par Vialar ([*4*], tome IV, p. 102—104). Ces documents sont relatifs à la valeur moyenne journalière de la pression à Paris St. Maur, pendant les années 1945 et 1946 (la valeur moyenne utilisée est la moyenne des 24 pressions du jour relevées heure par heure).

Nous reproduisons ces données ci-dessous, au Tableau 3 où figurent les valeurs de r_k (coefficient d'autocorrélation d'ordre k de la série observée) pour k variant de 0 à 37[2].

La moyenne et l'écart-type de la pression moyenne journalière des deux années sont respectivement de 1.011,5 mb. et de 8,5 mb.

Tableau 3. *Coefficients d'autocorrélation de la pression moyenne journalière (p_t) à Paris St. Maur (1945 à 1946)*

k	r_k	k	r_k	k	r_k	k	r_k	k	r_k
0	1.000	8	.221	16	—.006	24	—.036	32	—.035
1	.824	9	.185	17	—.005	25	—.082	33	—.046
2	.604	10	.147	18	.008	26	—.117	34	—.063
3	.478	11	.114	19	.022	27	—.124	35	—.060
4	.410	12	.080	20	.009	28	—.111	36	—.064
5	.332	13	.047	21	.003	29	—.102	37	—.008
6	.268	14	.030	22	.007	30	—.060		
7	.265	15	.009	23	—.001	31	—.034		

[1] Pour $10 \geq j > 5$, le prolongement algébrique perd toute qualité car un seul terme, celui d'indice $(i + j - 1)$, reste connu dans l'expression de $\Delta^2 S 5_{i+j-2}$.

[2] r_k est employé au lieu de ρ_k dans l'étude des séries observées finies.

4. Définition de fonctions de pression et de variation de pression

Soit l'indice i prenant des valeurs entières et définissons les fonctions suivantes :

1. la pression journalière : p_i ; (4. 1)

2. la variation en un jour de la pression journalière :

$$v_i = p_i - p_{i-1} ; \tag{4. 2}$$

3. la variation en n jours de la pression journalière :

$$\delta_n p_i = p_{i+n} - p_i = \sum_{j=i+1}^{i+n} v_j , \tag{4. 3}$$

qui est une moyenne arithmétique de nv_i ; en particulier, pour $n = 1$, $\delta_1 p_i = v_{i+1}$;

4. la pression moyenne de n jours :

$$Pn_i = \frac{1}{n} \sum_{j=i+1}^{i+n} p_j , \tag{4. 4}$$

qui est une moyenne arithmétique de p_i ; en particulier, pour $n = 1$, $P_{1i} = p_{i+1}$;

5. la variation en n jours de la pression moyenne de n jours :

$$\delta n Pn_i = Pn_{i+n} - Pn_i = \frac{1}{n} \sum_{j=i+1}^{i+n} \delta n p_j = \frac{1}{n} \sum_{j=i+1}^{i+n} \sum_{k=j+1}^{j+n} v_k , \tag{4. 5}$$

qui est une moyenne arithmétique de la variation en n jours de la pression journalière ou une moyenne arithmétique itérée deux fois de nv_i.

La variation $\delta_n Pn_i$ est donc une moyenne glissante en v_k de structure algébrique analogue à celle de Tn_i (2. 1), et dont les poids sont :

$$\frac{1}{n} (1, 2, 3, \ldots, n-1, n, n-1, \ldots, 3, 2, 1,) \tag{4. 6}$$

En particulier, pour $n = 1$, $\delta_1 P_{1i} = \delta_1 p_{i+1} = v_{i+2}$.

En un point de l'atmosphère, chacune de ces fonctions définit une suite de valeurs qui constitue une série chronologique observée de la fonction considérée. Les séries de pressions moyennes Pn_i peuvent être qualifiées de chevauchantes pour $(n - 1)$ jours car leurs termes successifs portent sur deux groupes de n jours consécutifs ayant $(n - 1)$ jours en commun.

Enfin, on peut extraire de cette série les séries Pn_{2i}, Pn_{3i}, ..., Pn_{ki}, ..., $Pn_{(n-1)i}$ chevauchantes pour $(n - 2)$, $(n - 3)$, ..., $(n - k)$, ..., 1 jours ainsi que la série non chevauchante Pn_{ni} dont les termes successifs sont relatifs à deux périodes contiguës de n jours. De même, les chevau-

chements des séries de variation de la pression moyenne $\delta n P n_{ki}$, pour $k = 1,2, \ldots, (n-1), n$, définis par rapport à la pression journalière p_j, sont respectivement de $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 1,0 jours.

Il est évident que les caractères statistiques des séries non chevauchantes dérivent uniquement des propriétés statistiques de la série initiale de pressions atmosphériques (répartition spatiale et évolution des centres de pression), tandis que ceux des séries chevauchantes sont d'origine plus complexe, à la fois physique et algébrique, par l'effet de recouvrement des périodes relatives aux termes successifs de la série.

En conséquence, les propriétés statistiques des séries non chevauchantes de pressions moyennes sont les seules dont la signification soit exclusivement météorologique.

5. Propriétés statistiques des séries de pression

A partir du Tableau 3, nous avons calculé les coefficients d'autocorrélation relatifs aux séries chronologiques v_i (Tableau 4) et $P\,5_i$ (Tableau 5), et nous avons représenté aux Fig. 1, 2, 3 et 4 les corrélogrammes des séries p_i, v_i, $P\,5_i$ et $P\,5_{5i}$.

Tableau 4. *Coefficients d'autocorrélation de* v_i

k	r_k	k	r_k	k	r_k	k	r_k	k	r_k
0	1.000	8	—.022	16	—.045	24	.031	32	.028
1	.125	9	.005	17	—.034	25	—.031	33	.017
2	—.267	10	—.014	18	—.002	26	—.079	34	—.056
3	—.164	11	.002	19	.076	27	—.056	35	.019
4	.028	12	—.002	20	—.019	28	.011	36	—.170
5	—.039	13	—.045	21	—.028	29	—.093		
6	—.173	14	.011	22	.034	30	.045		
7	.116	15	—.017	23	.076	31	.076		

Tableau 5. *Coefficients d'autocorrélation de* $P5_i$

k	r_k	k	r_k	k	r_k	k	r_k	k	r_k
0	1.000	8	.308	16	.018	24	—.066	32	—.076
1	.963	9	.257	17	.011	25	—.095	33	—.070
2	.872	10	.209	18	.010	26	—.118		
3	.754	11	.164	19	.010	27	—.129		
4	.630	12	.121	20	.008	28	—.128		
5	.516	13	.084	21	.000	29	—.117		
6	.429	14	.054	22	—.015	30	—.100		
7	.364	15	0.32	23	—.038	31	—.085		

Si l'on interprète ces corrélogrammes comme KENDALL ([2] chapitre 30, p. 399—421) propose de le faire, on peut dire que :

1. ces quatre corrélogrammes sont ceux de séries ne comportant pas de composantes sinusoïdales car ils ne présentent pas d'oscillations d'amplitude constante non amortie ;

Fig. 1. Corrélogramme de p_i

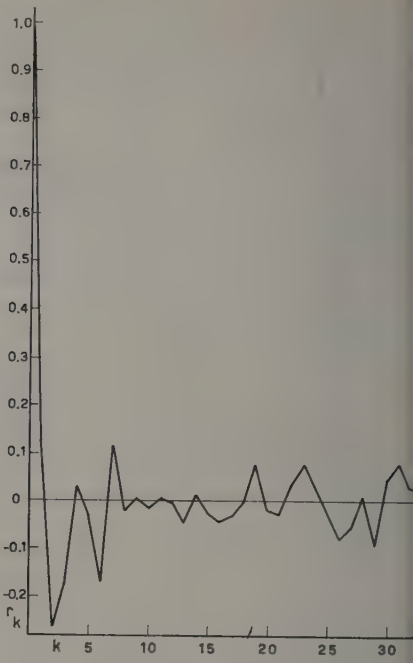

Fig. 2. Corrélogramme de V_i

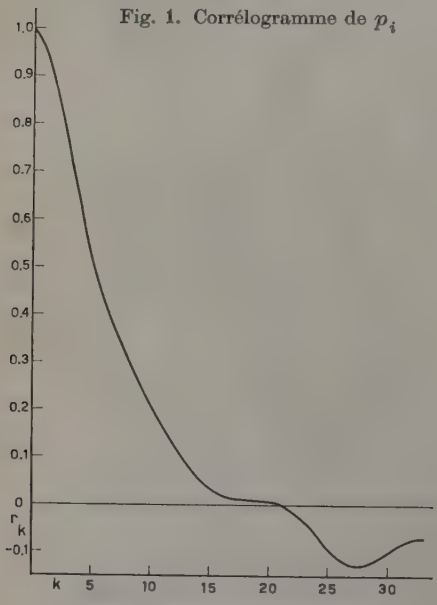

Fig. 3. Corrélogramme de $P5_i$

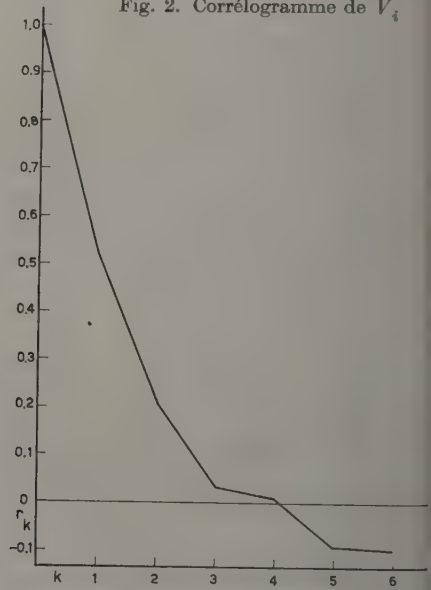

Fig. 4. Corrélogramme de $P5_{5.j}$

2. l'on peut envisager d'interpréter les séries p_i, $P\,5_i$ et $P\,5_{5i}$ par des schémas autorégressifs, car leurs corrélogrammes montrent une décroissance rapide et régulière du coefficient d'autocorrélation r_k pour k croissant ;

3. par contre la série v_i n'est pas interprétable par un schéma autorégressif, car son corrélogramme fluctue irrégulièrement autour de zéro.

Pour faire ressortir plus particulièrement la persistance des séries non chevauchantes Pn_{ni} et $\delta n\, Pn_{ni}$, nous avons calculé le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 (ρ_1) relatif aux couples de valeurs successives de ces séries, pour $n = 1, 2, \ldots$ Ces valeurs figurent au Tableau 6.

Tableau 6. *Persistance des séries Pn_{ni} (1) et $\delta n\, Pn_{ni}$ (2)*

n	(1)	(2)	n	(1)	(2)	n	(1)	(2)
1	.82	.12	7	.44	—.18	13	.23	
2	.69	—.11	8	.40	—.21	14	.20	
3	.62	—.16	9	.36	—.24	15	.17	
4	.56	—.19	10	.32	—.26	16	.15	
5	.52	—.18	11	.29	—.27	17	.12	
6	.48	—.17	12	.26	—.27	18	.10	
						19	.08	

On constate ainsi que la persistance de la pression moyenne de n jours Pn_{ni} est positive, et qu'elle décroit avec n, tandis que celle de la variation entre deux pressions moyennes de n jours, successives et non chevauchantes, $\delta n\, Pn_{ni}$ décroit négativement avec n, mais est positive et très faible pour $n = 1$.

De façon générale, nous avons constaté que les corrélogrammes des séries présentant une forte persistance positive, comme ceux de Pn_i, Pn_{ni} et $\delta n\, Pn_i$ (sauf $n = 1$), sont interprétables par des schèmas autorégressifs, tandis que ceux relatifs à des séries de persistance négative, ou faible et positive, comme $\delta n\, Pn_{ni}$, ne sont pas interprétables de cette façon. Les corrélogrammes de ces premières séries ressemblent à ceux des Fig. 1, 3 et 4, et ceux des secondes sont analogues au corrélogramme de la Fig. 2.

6. Efficacité d'une prévision de pression atmosphérique moyenne

Supposons que les valeurs de Pn_k pour $n > 1$, antérieures à Pn_{i+n} et non chevauchantes avec Pn_{i+n}, soient connues, et désignons par $e\,(Pn_{i+n})$ l'estimation de la pression moyenne Pn_{i+n}, réalisée à l'aide d'un procédé quelconque. Cette estimation implique notamment celle de la variation entre les deux pressions moyennes successives et non chevauchantes, c'est-à-dire $e\,(\delta n\, Pn_i) = e\,(Pn_{i+n}) - Pn_i$.

Lors d'une estimation de pression en vue de l'utiliser, pour la prévision du temps, il est capital que les variations prévues de la pression permettent le tracé des isallobares sur les cartes pronostiques. De sorte que nous considérons qu'une méthode de prévision de pression est *efficace* si elle satisfait aux deux conditions:

1. La probabilité $\beta = \text{Prob}\{[e(\delta n\, Pn_i) \cdot \delta n\, Pn_i] > 0\}$ de réussite dans l'estimation du signe de la variation entre les deux pressions moyennes successives et non chevauchantes est « grande ». Le paramètre β, appelé *coefficient d'efficacité*, doit être proche de 1 pour que cette condition soit satisfaite.

2. La variance des erreurs d'estimation de la valeur de la pression $[e(Pn_{i+n}) - Pn_{i+n}]$ est « petite » (précision des estimations).

Remarquons que d'une façon générale, la qualité de l'estimation ou de la mesure d'une grandeur se définit par sa précision (absolue et relative) tandis que la qualité de la prévision d'une grandeur dépend en premier lieu de l'estimation correcte du devenir de la grandeur depuis sa valeur présente jusqu'à sa valeur future, et, en second lieu, de la précision de l'estimation de la grandeur.

Notons encore que sous l'hypothèse de normalité de la variable aléatoire à deux dimensions $[e(\delta n\, Pn_i), \delta n\, Pn_i]$, les tables de PEARSON ([3], vol. 2, p. 78—109) fournissent directement la valeur du coefficient d'efficacité β correspondant au coefficient de corrélation $\rho[e(\delta n\, Pn_i), \delta n\, Pn_i]$.

7. Autorégression des séries non chevauchantes de pression moyenne

Dans la suite de ce travail, nous envisagerons plus spécialement la possibilité de prévisions efficaces de la pression atmosphérique moyenne. Dans ce paragraphe, nous examinerons la possibilité de prévisions efficaces par la méthode des équations autorégressives. A cet effet, nous avons fait figurer au Tableau 7 les coefficients de corrélation multiple relatifs aux régressions de p_i ou de v_i en les pressions journalières antérieures ainsi que les valeurs du coefficient d'efficacité β dans le cas où l'hypothèse de normalité de la variable aléatoire $[e(v_i), v_i]$ est justifiée[1].

Tableau 7. *Coefficients de corrélation multiple et coefficients d'efficacité pour les régressions, en p_{i-1}, en p_{i-1} et p_{i-2}, en p_{i-1}, p_{i-2} et p_{i-3}, de p_i ou de v_i*

Régression de	$R(p_i)$	$R(v_i)$	β
1 terme	.82	.30	.60
2 termes	.83	.37	.62
3 termes	.84	.41	.63

Ces résultats montrent :

1. que l'efficacité des prévisions est de l'ordre de 60% seulement ;

2. que les équations autorégressives à plusieurs termes n'améliorent pas sensiblement la précision des estimations obtenues par l'équation autorégressive à un terme.

Nous avons également constaté que, pour les pressions moyennes, Pn_{i+n}, avec $n > 1$, la méthode des équations autorégressives à plusieurs

[1] Ne disposant pas des valeurs individuelles des p_i, l'hypothèse de normalité introduite ici et ailleurs dans ce travail n'a pu être vérifiée.

termes ne permet pas non plus d'améliorer les estimations obtenues par les équations autorégressives à un terme.

On peut montrer, par ailleurs, que l'inefficacité des prévisions obtenues par des équations autorégressives du *premier ordre* est un fait général pour toutes les séries chronologiques à persistance positive. En effet, envisageons une telle série d_t dont nous supposons la moyenne nulle. Dans ces conditions, de l'égalité[1] :

$$\frac{E(\Delta^1 d_t)^2}{2} = E(d_t)^2 - E(d_t \cdot d_{t-1}), \tag{7.1}$$

on déduit immédiatement :

$$\rho_1 = \frac{E(d_t \cdot d_{t-1})}{E(d_t)^2} = \frac{2E(d_t)^2 - E(\Delta^1 d_t)^2}{2E(d_t)^2} = 1 - \frac{E(\Delta^1 d_t)^2}{2E(d_t)^2}, \tag{7.2}$$

$$\rho' = \frac{E(d_t \cdot \Delta^1 d_{t-1})}{\sqrt{E(d_t)^2 \cdot E(\Delta^1 d_{t-1})^2}} = \sqrt{\frac{E(\Delta^1 d_{t-1})^2}{4E(d_t)^2}} = \sqrt{\frac{1-\rho_1}{2}}. \tag{7.3}$$

Il en résulte que, si $\rho_1 < 0$ (persistance positive), ρ_1 et ρ' ne peuvent être grands simultanément (on a : $0 < \rho' \leq 1/2 \leq \rho_1$ ou $\rho' \geq 1/2 \geq \rho_1 > 0$) de sorte que les estimations :

$$e(d_t) = \rho_1 d_{t-1}, \tag{7.4}$$

et

$$e(\Delta^1 d_{t-1}) = \rho' d_{t-1}, \tag{7.5}$$

ne peuvent conduire à des prévisions efficaces.

8. Régression locale de la valeur de la pression moyenne, non chevauchante avec des pressions connues

Pour épuiser les possibilités de réaliser, à partir d'informations locales sur la pression, des prévisions efficaces de pressions moyennes de plusieurs jours, il reste à envisager les corrélations entre la pression moyenne à prévoir et toutes les pressions moyennes antérieures et non chevauchantes. Pour distinguer cet aspect de la prévision de celui de l'autorégression, nous désignons cette méthode par l'appellation de *régression ou corrélation locale*.

Supposons que la dernière valeur connue de la pression journalière soit p_t ; dans ce cas, Pn_t est la première valeur entièrement inconnue de la pression moyenne de n jours. A partir des documents utilisés (3), nous avons constaté que le maximum du coefficient de corrélation entre les pressions Pn_i ($n = 2, \ldots, 6$) et toutes les pressions moyennes antérieures et non chevauchantes est toujours réalisé avec la pression jour-

[1] E est le symbole de l'espérance mathématique (valeur moyenne).

nalière p_i. En particulier, la corrélation entre Pn_i et p_i (Tableau 8, Pn_i) est plus forte que celle qui lie les termes consécutifs de la série Pn_{ni} (Tableau 6, 1).

Tableau 8. *Coefficients de corrélation simple entre Pn_i et p_i. Coefficients de corrélation multiple entre $\delta n\, Pn_{i-n}$ et Pn_{i-n}, p_i. Ecarts-types des erreurs d'estimation de Pn_i (σ est mesuré en mb). Coefficients d'efficacité β*

n	Pn_i	$\delta n\, Pn_{i-n}$	σ	β
2	.75	.55	5.4	.69
3	.70	.58	5.6	.70
4	.66	.60	5.6	.70
5	.63	.61	5.6	.70

D'autre part, nous avons constaté que l'utilisation de la corrélation multiple de Pn_i avec la suite des pressions journalières antérieures p_i, p_{i-1}, . . ., ne permet pas d'améliorer davantage la prévision par régression locale.

Afin de juger de l'efficacité de ces prévisions, nous avons fait figurer au Tableau 8 les coefficients de corrélation simple entre Pn_i et p_i, et les coefficients de corrélation multiple entre $\delta n\, Pn_{i-n} = Pn_i - Pn_{i-n}$ et Pn_{i-n}, p_i, ainsi que les écarts-types des erreurs d'estimation de Pn_i et les coefficients d'efficacité β dans le cas où l'hypothèse de normalité de la variable aléatoire $[e\,(\delta n\, Pn_{i-n}),\ \delta n\, Pn_{i-n}]$ est justifiée. Ces résultats montrent que les deux coefficients de corrélation varient en sens contraire l'un de l'autre pour des échéances croissantes, de sorte que, pour tout n, la prévision par régression locale est inefficace, soit par une valeur trop élevée de l'écart-type σ des erreurs d'estimation, soit par une valeur trop basse du coefficient d'efficacité β. Il apparaît aussi que l'égalité des deux coefficients de corrélation est réalisée pour $n = 5$.

9. Régression locale des valeurs de la pression moyenne chevauchantes avec les pressions connues

Ces obstacles à la prévision correcte de la pression ne se présentent pas dans le cas de la prévision des pressions moyennes chevauchantes partiellement connues, Pn_{i-1}, Pn_{i-2}, . . ., Pn_{i-n+1}, intermédiaires entre la valeur Pn_i non chevauchante et non prévisible efficacement (voir paragraphe 8) et la valeur Pn_{i-n} connue exactement. Il est suffisant d'établir ce fait dans le cas de l'estimation de Pn_{i-1} (cette valeur ne chevauche que d'un seul jour avec la dernière pression Pn_{i-n}), où la prévision est la plus difficile, mais où les résultats sont les plus intéressants.

Dans ce but, nous avons fait figurer au Tableau 9, les coefficients de corrélation simple entre Pn_{i-1} et p_i et les coefficients de corrélation multiple entre $\delta n\, Pn_{i-n-1} = Pn_{i-1} - Pn_{i-n-1}$ et Pn_{i-n-1}, p_i ainsi que les écarts-types des erreurs d'estimation de Pn_{i-1} et les coefficients d'efficacité β dans le cas où l'hypothèse de normalité de la variable

aléatoire $[e(\delta n\, Pn_{i-n-1}),\ \delta n\, Pn_{i-n-1}]$ est justifiée. Ces résultats sont bien meilleurs que ceux obtenus au paragraphe précédent. On notera que les deux coefficients de corrélation décroissent avec l'allongement de l'échéance ; toutefois, pour $n < 5$, le coefficient d'efficacité β atteint et dépasse 80% et l'écart-type σ des erreurs d'estimation reste inférieur à 5 mb. Quoique ces prévisions, par régression locale et par chevauchement minimum de la pression moyenne prévue, ne soient pas excellentes, l'écart-type des erreurs de prévision étant encore assez grand, on peut les considérer comme efficaces car elles sont remarquables par les valeurs élevées du coefficient β. A première vue, il est étonnant que le chevauchement minimum qui est toléré permette de relever considérablement les valeurs correspondantes des coefficients d'efficacité β obtenus au paragraphe précédent.

Tableau 9. *Coefficients de corrélation simple entre* Pn_{i-1} *et* p_i. *Coefficients de corrélation multiple entre* $\delta n\, Pn_{i-n-1}$ *et* Pn_{i-n-1}, p_i. *Ecarts-types des erreurs d'estimation de* Pn_{i-1} *(*σ *est mesuré en mb.) Coefficients d'efficacité* β

n	Pn_{i-1}	$\delta n\, Pn_{i-n-1}$	σ	β
2	.96	.93	2.4	.88
3	.89	.85	3.6	.82
4	.83	.80	4.2	.80
5	.78	.78	4.5	.79

L'explication de ce fait réside dans la considération de la structure algébrique de la moyenne glissante $\delta n\, Pn_i$. Pour mettre ce phénomène en évidence, nous avons fait figurer au Tableau 10 les coefficients de corrélation $\rho\,[e(Sn_{i+n}), Sn_{i+n}]$ (extraits du Tableau 2) et $\rho\,[e(\delta n\, Pn_{i-n}), \delta n\, Pn_{i-n}]$ (extraits du Tableau 8), ainsi que ceux de $\rho\,[e(Sn_{i+n-1}), Sn_{i+n-1}]$ (extraits du Tableau 2) et $\rho\,[e(\delta n\, Pn_{i-n-1}), \delta n\, Pn_{i-n-1}]$ (extraits du Tableau 9). La comparaison de ces résultats montre que les écarts sont faibles entre les coefficients de corrélation relatifs aux estimations correspondantes des fonctions Sn_i et $\delta n\, Pn_i$.

Tableau 10. *Coefficients de corrélation (2.10) pour* $j = n$ *(colonne 1) et pour* $j = n - 1$ *(colonne 3). Coefficients de corrélation multiple entre* $\delta n\, Pn_{i-n}$ *et* Pn_{i-n}, p_i *(colonne 2). Coefficients de corrélation multiple entre* $\delta n\, Pn_{i-n-1}$ *et* Pn_{i-n-1}, p_i *(colonne 4)*

n	(1)	(2)	(3)	(4)
2	.41	.55	.91	.93
3	.51	.58	.86	.85
4	.56	.60	.83	.80
5	.59	.61	.80	.78

Cette constatation n'a rien d'étonnant, car les informations utilisées dans ces deux cas pour réaliser les prévisions sont analogues :

1. Sn_i et $\delta n\, Pn_i$ (exprimé en v_k) sont des moyennes glissantes de structure identique ;

2. les propriétés statistiques des séries chronologiques initiales sont proches car, d'une part, la série s_i est purement aléatoire et, d'autre part, la série v_i n'est pas autorégressive.

Il en résulte que les prévisions, même efficaces, de la pression moyenne n'apportent aucune information sur les variations futures v_i, de la pression journalière. Le coefficient d'efficacité dépend de l'importance relative dans le terme Sn_i à estimer, des éléments s_k qui y sont connus, par rapport à celle des termes qui y sont inconnus. En particulier, l'augmentation considérable du coefficient d'efficacité β lors de l'introduction d'un chevauchement d'un seul jour résulte uniquement de l'accroissement important des coefficients de corrélation (2.10) de $j = n$ à $j = n - 1$, (Tableau 2).

10. Conclusions

Nous avons constaté l'échec de la méthode des équations autorégressives et le caractère illusoire des prévisions obtenues par la méthode de régression locale, appliquée aux moyennes glissantes de la pression journalière. Il en résulte notamment que des cartes pronostiques de la pression moyenne (de 2 à 5 jours) qui seraient élaborées par application de la seconde méthode, en toutes les stations d'un réseau synoptique couvrant l'Europe et le proche Atlantique, ne présenteraient que peu d'intérêt pour la prévision du temps à moyenne échéance.

De plus, ce modèle de prévision serait très rudimentaire, car l'estimation d'une pression moyenne se calculerait en chaque station du réseau, à l'aide d'une transformation linéaire de la pression journalière p_i de la forme :

$$e(Pn_i) = f_n(p_i - m) + m, \quad (n_i = 2, 3, 4, 5,), \tag{10.1}$$

où $f_n = r_{n1}\,\sigma_n/\sigma_1$, (Les paramètres $r_{n1}\,\sigma_n/\sigma_1$ et m sont respectivement le coefficient de corrélation entre P_{ni} et p_i, le rapport des écarts-types de Pn_i et de p_i et la moyenne climatologique de la pression a cette station.)

D'autre part, il faut noter la coïncidence entre le manque d'autorégressivité de la série chronologique de la variation de la pression journalière et l'échec des deux méthodes de prévisions envisagées ici. Ce fait nous suggère qu'il est peu vraisemblable qu'une quelconque méthode de prévision à courte et moyenne échéances de la pression atmosphérique, basée sur des informations locales de la pression, puisse conduire à de véritables prévisions efficaces lorsque la série chronologique de la variation de la pression n'est pas autorégressive.

Ce sont des problèmes, étudiés pendant notre service militaire, qui nous ont suggéré ce travail.

Nous remercions le Commandant F. BASTIN, Chef du Service Météorologique de la Force Aérienne Belge, qui nous avait confié l'étude de la méthode de prévision à moyenne échéance, basée sur les principes de la méthode de GRAPPE, que Monsieur F. BOOMANS, prévisionniste au Service Météorologique de la Force Aérienne Belge, avait expérimentée.

Nos remerciements s'adressent également à Monsieur R. Sneyers, Météorologiste adjoint à l'Institut Royal Météorologique de Belgique, qui nous a prodigué d'utiles conseils dont nous avons tiré le plus grand profit.

Nous remercions également Messieurs les professeurs J. Van Mieghem et J. Teghem, ainsi que Monsieur P. Dagnelie, Maître de conférences à l'Institut Agronomique de l'Etat à Gembloux, pour l'aide qu'ils nous ont apportée dans la rédaction de ce travail.

Bibliographie

1. Grappe, R.: La prévision à moyenne et longue échéance par les singularités de pression utilisées synoptiquement. Météorologie Nationale, Paris, 1953.
2. Kendall, M. G.: The Advanced Theory of Statistics, Vol. II. London, 1952.
3. Pearson, K.: Tables for Statisticians and Biometricians, Vol. II. London, 1930.
4. Vialar, J.: Calcul des probabilités et statistiques, Vol. IV. Météorologie Nationale, Paris, 1956.

551.594(494)

(Lichtklimatisches Observatorium Arosa)

Tages- und Jahresgänge der luftelektrischen Elemente in Arosa

Von

L. Saxer und W. Sigrist

Mit 7 Textabbildungen

Zusammenfassung. Die Verfasser berichten über die Ergebnisse luftelektrischer Registrierungen in drei Höhenlagen von 1840, 2050 und 2650 m ü. M. während der Jahre 1957 bis 1959 in und bei Arosa. Die Tages- und Jahresgänge von Potentialgradienten, polarer Leitfähigkeit und Vertikalstromdichte werden diskutiert. Es zeigt sich ein deutlicher Zusammenhang zwischen dem Jahresgang des Potentialgradienten und dem mit dem Dobson-Spektrometer gemessenen Ozongehalt; auf eine mögliche Erklärung wird hingewiesen.

Summary. The authors report on the results of records of atmospheric electricity in the levels of 1840, 2050, 2650 m above sea level during the years 1957 to 1959 at Arosa and nearby (Switzerland). The diurnal and annual variation of potential gradient, polar conductivity and air-earth-current density are discussed. It is demonstrated that there is a clear relation between the annual variation of the potential gradient and ozone content measured by a Dobson spectrometer; a plausible explanation is discussed.

Résumé. On discute des enregistrements de l'électricité atmosphérique pour les années 1957, 1958, 1959 effectuées aux altitudes de 1840 m, 2050 m et 2650 m à et au-dessus d'Arosa. Les variations diurnes et annuelles du gradient du potentiel, de la conductibilité polaire et de la densité du courant électrique vertical sont analysées. Les auteurs mettent en évidence une relation entre les variations annuelles du gradient du potentiel et de la concentration en ozone mesurée avec un spectromètre Dobson; une interprétation possible de cette constatation est envisagée.

I. Einführung

Während des Internationalen Geophysikalischen Jahres haben wir in Arosa und auf dem Tschuggen bei Arosa Dauerregistrierungen der luftelektrischen Elemente, nämlich des Potentialgradienten, der elektrischen Leitfähigkeit (positive Polarität) und der Vertikalstromdichte durchge-

führt. Sie wurden ergänzt durch zeitweilige Messungen des Potentialgradienten auf der Bergstation Weißhorn.

Die Station Arosa 1840 m ü. M. liegt auf der Dachterrasse eines hohen, von Wald umgebenen Hauses oberhalb des Dorfes. Die Station Tschuggen ist ein kleines, ganz frei gelegenes, unbewohntes Beobachtungshaus 2050 m ü. M. auf einer kleinen Kuppe am Hang gegen das Weißhorn; es hat keine bewohnten Gebäude in der Umgebung. Die Bergstation Weißhorn liegt auf dem Gipfel des Aroser Weißhorns in 2650 m ü. M. im Gebäude der Endstation der Schwebebahn.

Abb. 1. Situationsplan der Meßstationen. *A* Arosa, *T* Tschuggen, *W* Weißhorn

Arosa, das ausgesprochene Hanglage hat, liegt am Ende eines Tales mit starkem Gefälle. Nach den Untersuchungen von F. W. Paul Götz [*1*] zeichnet es sich durch besondere Luftreinheit und große Lufttrockenheit aus. Da der Talschluß von einem schützenden Bergkranz umgeben ist, sind große Windstärken sehr selten und treten fast nur bei Föhn auf. Bei ungestörter Wetterlage weht in der Nacht ein schwacher Bergwind aus NW und tagsüber ein schwacher Talwind aus SE. Der Höhenlage entsprechend, liegt im Gelände ringsum im Durchschnitt während 6 Monaten eine geschlossene Schneedecke.

Die nächstgelegenen Orte mit einiger Industrie sind Chur in etwa 15 km und Ems mit einer chemischen Fabrik in 18 km Entfernung, beide etwa 600 m ü. M. Abb. 1 zeigt einen Situationsplan.

II. Meßeinrichtungen

Der Potentialgradient wird mit einem selbstkompensierenden Elektrometerröhrenverstärker gemessen; dieses Gerät wurde früher von Saxer und Sigrist [*2*] beschrieben. Das Gerät hat einen hohen, über den ganzen Meßbereich konstanten Eingangswiderstand von 10^{14} Ohm und eine lineare Anzeige. Der Meßbereich wurde von — 200 bis + 300 Volt gewählt. Als Sonde dient ein Poloniumpräparat von einigen Mikrocurie.

Die polare Leitfähigkeit wird mit der Aspirationsmethode nach Gerdien bestimmt. Ein durch einen Elektromotor mit Kurzschlußanker betriebener Ventilator saugt die Außenluft durch einen Zylinderkondensator. Die zentrale Auffangelektrode ist über einen geeichten Widerstand von 10^{11} Ohm an Erde gelegt; die an ihr entstehende Spannung, die ein Maß für die polare Leitfähigkeit ist, wird mit einem kapazitiven Vibratorverstärker von 10^{14} Ohm Eingangswiderstand gemessen.

Zur Messung des Vertikalstromes dient ein im Freien horizontal aufgestelltes Auffanggitter aus cadmiertem, gelochtem Eisenblech. Es ist

mit drei geheizten Teflon-Isolatoren hochisoliert gegen Erde abgestützt. Der dem Auffanggitter zufließende Vertikalstrom von etwa 10^{-12} Amp. wird durch ein abgeschirmtes Kabel einem Hochohmwiderstand von 10^{11} Ohm zugeführt und gegen Erde abgeleitet. Zudem ist nach Kasemir [3] ein hochisolierender Polystyrolkondensator eingebaut, welcher die

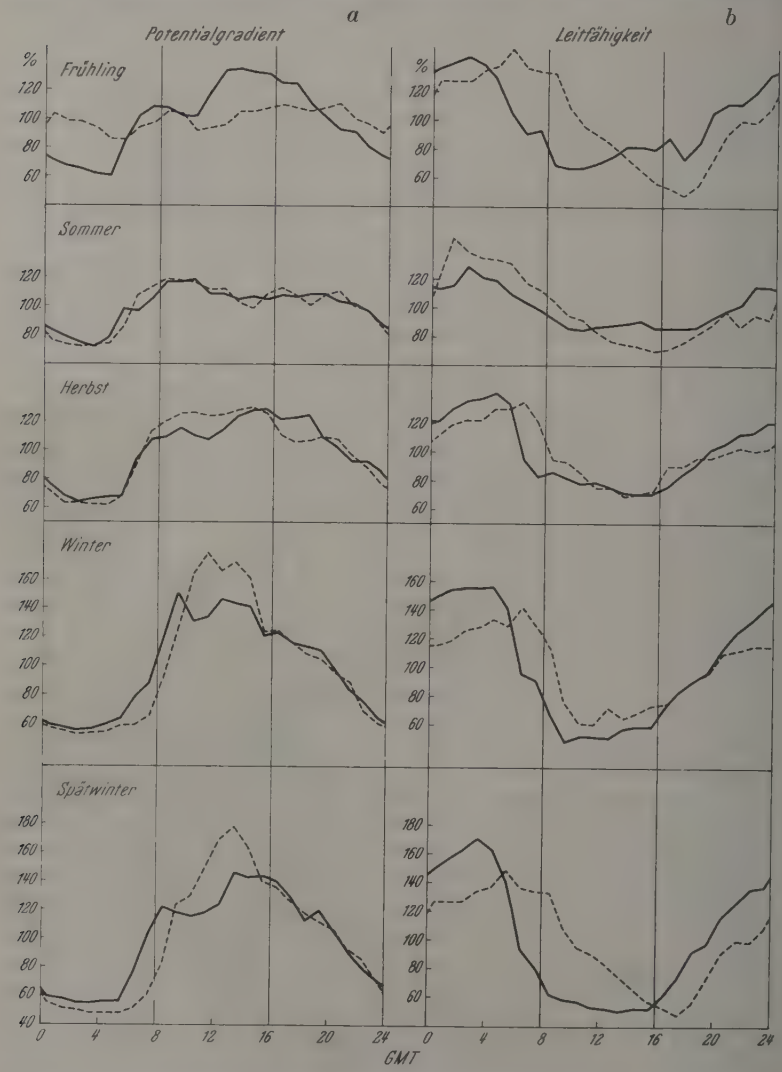

Abb. 2. Jahreszeitliche Tagesgänge: links Potentialgradient, rechts polare Leitfähigkeit. ——— Arosa, – – – Tschuggen

auf dem Auffanggitter influenzierten Ladungen neutralisiert. Die entstehende Gleichspannung wird wieder mit einem Vibratorverstärker verstärkt.

Die drei luftelektrischen Elemente werden zusammen mit der Windrichtung durch einen Punktschreiber laufend registriert.

Die Messung der polaren Leitfähigkeit erfolgt direkt in Ohm $^{-1}$ m^{-1}; Potentialgradient und Vertikalstromdichte ergeben nur relative Werte, welche durch Reduktionsmessungen in ebenem Gelände in Volt m^{-1} bzw. A m^{-2} umgerechnet werden können. Reduktionsmessungen im Gebirge sind problematisch und immer mit großer Unsicherheit behaftet; wir haben daher Reduktionen nur für den Potentialgradienten vorgenommen.

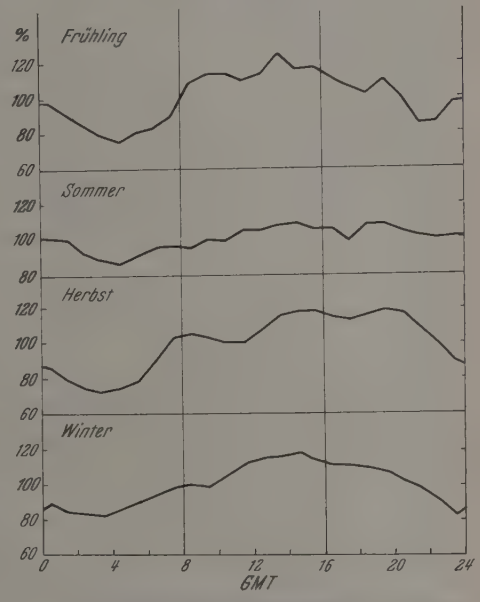

Abb. 3. Jahreszeitliche Tagesgänge des Potentialgradienten auf Weißhorn

III. Meßergebnisse

1. Tagesgänge

Für die Berechnung der Tagesgänge wurden nur niederschlagfreie Tage mit einer Bewölkung ≤ 5 ausgewählt. Abb. 2 *a* zeigt die Tagesgänge des Potentials an den Stationen Arosa und Tschuggen zu den Jahreszeiten: Frühling (April, Mai), Sommer (Juni, Juli, August), Herbst (September, Oktober, November), Winter (Dezember, Januar), Spätwinter (Februar, März). Beide Stationen zeigen in den Herbst- und Wintermonaten einen ausgeprägten, nahezu einwelligen Tagesgang mit großen Amplituden. In den wärmeren Jahreszeiten sind die Unterschiede zwischen den Tages- und Nachtwerten kleiner, und der Tagesgang ist weniger einheitlich, was auf die stärkere Durchmischung der unteren Luftschichten in diesen Jahreszeiten zurückzuführen ist. Wenn auch die Tagesgänge an beiden Stationen im allgemeinen recht ähnlich sind, so erkennt man doch deutlich, daß der steile Anstieg des Potentials am Morgen in Arosa früher erfolgt als auf der rund 200 m höher gelegenen Tschuggenstation während beim Abfall zu kleineren Werten in den Nachmittags- und Abendstunden keine deutliche Verschiebung wahrnehmbar ist. Die Maxima auf dem Tschuggen sind infolge des späteren Anstieges schmaler und steiler als jene in Arosa. Diese Erscheinung kann durch das Aufsteigen kern-

reicherer Talluft bei der Erwärmung am Morgen erklärt werden. Die stärkere Durchmischung der Atmosphäre im Sommer macht auch hier verständlich, daß diese Erscheinung nur im Winter ausgeprägt ist.

Auf der Weißhornstation sind die Unterschiede zwischen Tages- und Nachtwerten viel kleiner als jene von Arosa und Tschuggen (Abb. 3). Auch die Tagesgänge zu verschiedenen Jahreszeiten unterscheiden sich nicht wesentlich voneinander und zeigen eine deutliche Annäherung an den weltweiten Gang. Den Grund für dieses Verhalten sehen wir darin, daß die Luftmasse in dieser Höhe viel einheitlicher ist. Selbst wenn der Austausch die Bergstation erreicht, ist die Verdünnung der kernreicheren Luft bereits so groß, daß der Einfluß auf die Leitfähigkeit nicht mehr beträchtlich ist.

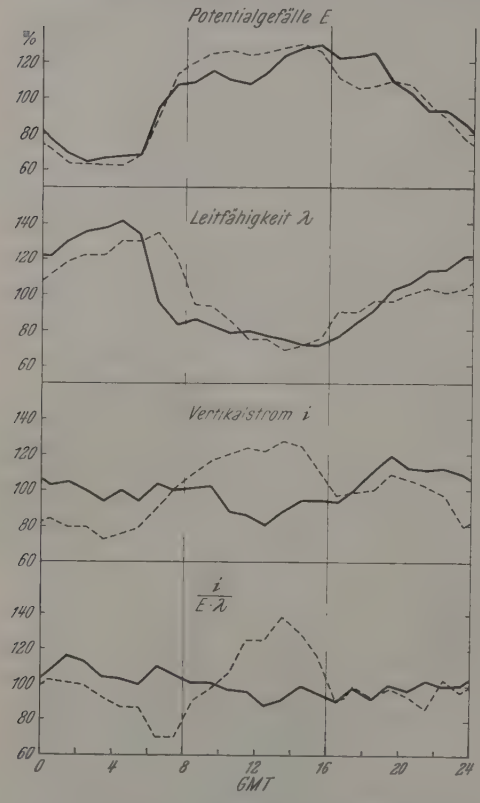

Abb. 4. Mittlerer Tagesgang der drei luftelektrischen Elemente Potentialgefälle E, Leitfähigkeit $\lambda+$, Vertikalstrom i sowie des Quotienten $\frac{i}{\lambda^+ \cdot E}$ für die Herbstmonate. ——— Arosa, — — — Tschuggen

Ein ähnliches Verhalten wie die Tagesgänge des Potentials, aber in großen Zügen gegenläufig zu diesen, zeigen die Tagesgänge der Leitfähigkeit in Abb. 2*b*. Die Phasenverschiebung zwischen dem starken Rückgang der Leitfähigkeit am Morgen in Arosa und demjenigen auf der Tschuggenstation ist auch hier deutlich zu sehen.

Vertikalstromdichte, Leitfähigkeit und Potentialgradient sind, sofern der Ladungstransport nur durch elektrische Kräfte bewirkt wird, durch das Ohmsche Gesetz $i = \lambda \cdot E$ verknüpft. Abb. 4 zeigt als Beispiel den mittleren Tagesgang der drei Elemente sowie des Quotienten $i/\lambda^+ \cdot E$ in Arosa und auf dem Tschuggen für die Herbstmonate. Der Quotient ist in Arosa nahezu konstant mit Schwankungen von etwa $\pm 10\%$; auf Tschuggen sind die Schwankungen bedeutend größer, etwa $\pm 30\%$. Diese Feststellungen gelten auch für die anderen Jahreszeiten. Die Ur-

sache für die verschieden großen Abweichungen dürfte in der unterschiedlichen Lage der beiden Stationen liegen: In Arosa messen wir auf einer Terrasse etwa 25 m über dem Erdboden, auf Tschuggen etwa 2 m über Boden. Durch den Elektrodeneffekt tritt in der Nähe des Bodens bis in eine Höhe von einigen Metern eine Verarmung an negativen Ionen, d. h. eine positive Raumladung auf. Bei starker Erwärmung des Bodens steigt die Luft und bringt die positive Raumladung auf das Auffanggitter, was eine Erhöhung des Vertikalstromes über den vom Ohmschen Gesetz geforderten Wert ergibt. Bei der Station Arosa ist diese Raumladung in 25 m Höhe aber schon sehr verdünnt und somit nur von geringerem Einfluß.

2. Jahresgänge

In Abb. 5 sind die Monatsmittel des Potentialgefälles und der Leitfähigkeit für die Jahre 1957, 1958 und 1959, sowie jene der Vertikalstromdichte in Arosa für die Dauer des Internationalen Geophysikalischen

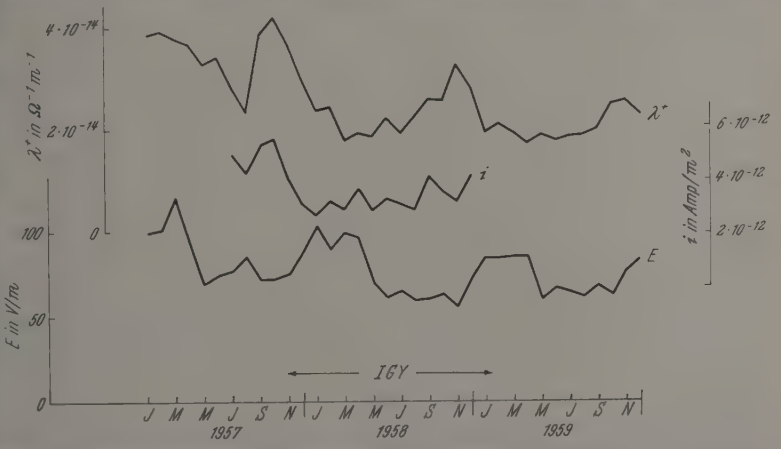

Abb. 5. Monatsmittel für Potentialgefälle E, polare Leitfähigkeit $\lambda+$ und Vertikalstromdichte i in Arosa

Jahres dargestellt. Sowohl das Potentialgefälle als auch die Leitfähigkeit haben einen deutlichen Jahresgang. Das Maximum des Potentialgefälles liegt zwischen Dezember und April, das Minimum zwischen Mai und Oktober. Der Jahresgang der Leitfähigkeit zeigt einen ähnlichen Verlauf mit einem Maximum in den Herbstmonaten und einem flachen Minimum im Frühling und Frühsommer. Im Gang der Vertikalstromdichte zeichnen sich sowohl die Änderungen der Leitfähigkeit als auch jene des Potentialgradienten ab, da die drei Größen, solange von einem Ladungstransport durch nichtelektrische Kräfte (Konvektion, Diffusion) abgesehen werden kann, durch die Beziehung $i = \lambda \cdot E$ verknüpft sind. Auf diesen Punkt haben wir bereits unter III. 1 hingewiesen.

Abb. 6 zeigt die Mittelwerte der Leitfähigkeit in Arosa bei verschiedenen Windrichtungen. Das Diagramm läßt einen Einfluß der Windrichtung auf die elektrische Leitfähigkeit erkennen. Der Bergwind erhöht die Leitfähigkeit durch Zufuhr von reiner Luft; doch erreichen die Unter-

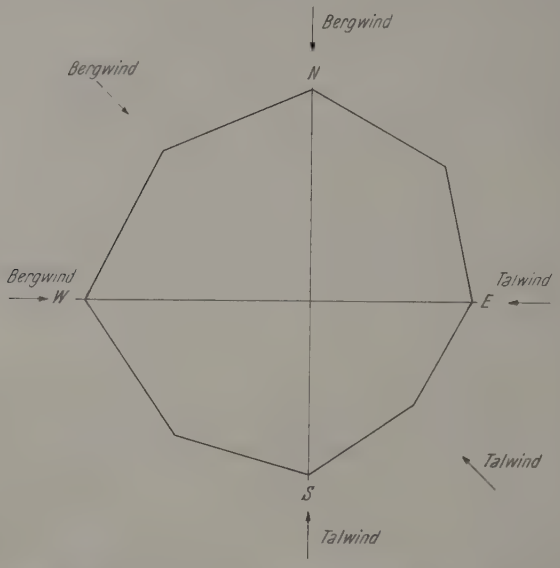

Abb. 6. Leitfähigkeit der Luft in Arosa in Abhängigkeit von der Windrichtung

schiede im Mittel nur etwa $\pm 20\%$, was sich aus der günstigen Hanglage der Station Arosa und ihrer großen Entfernung von kernproduzierenden Orten erklärt.

3. Vergleich der Jahresgänge von Potentialgefälle und hohem Ozon

Während der gleichen Zeit, da in Arosa die luftelektrischen Untersuchungen durchgeführt wurden, machte H. U. Dütsch [4] dort auch laufend Messungen des hohen Ozons. Es war deshalb naheliegend, die Frage zu prüfen, ob zwischen den luftelektrischen Vorgängen und dem Ozongehalt in den höheren Schichten der Atmosphäre Beziehungen bestehen. Der Umstand, daß nicht nur die Werte des gesamten Ozons, sondern auch ihre Verteilung auf die einzelnen Schichten mit Hilfe von Umkehrmessungen mit dem Dobson-Spektrometer berechnet wurden [5], erschien uns für die Prüfung dieser Frage besonders günstig. Beim Vergleich der luftelektrischen Elemente mit der Ozonkonzentration zeigte es sich, daß das Potentialgefälle eine deutliche Beziehung zum hohen Ozon hat, die im folgenden etwas näher untersucht werden soll.

In Abb. 7 ist der unter III. 2 besprochene Jahresgang des Potentialgefälles in Arosa zusammen mit dem Jahresgang des Ozongehaltes in verschiedenen Schichten aufgetragen. Die drei dargestellten Kurven für das Ozon erfassen die Schichten 1,8 bis 19 km, 1,8 bis 24 km und 1,8 bis 50 km (totales Ozon). Da die Umkehrmessungen nur bis April 1959 durchgeführt wurden, konnte für die restlichen Monate des Jahres 1959 lediglich noch das totale Ozon zum Vergleich herangezogen werden. Der Vergleich der Kurven von Abb. 7 zeigt eine überraschend gute Übereinstimmung zwischen dem Jahresgang des Ozongehaltes in den beiden unteren Schich-

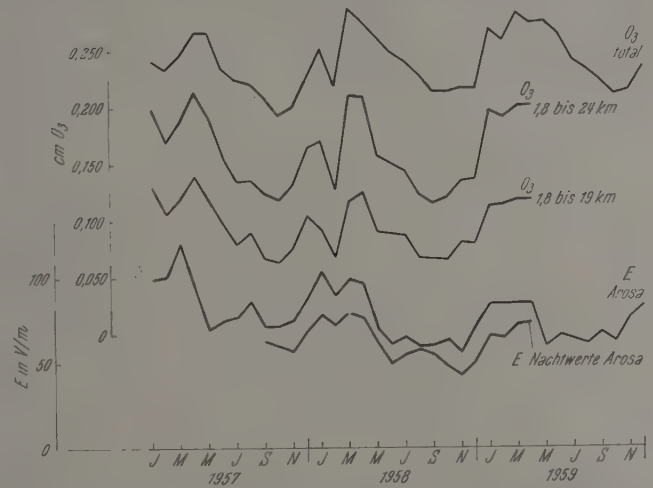

Abb. 7. Monatsmittel des Potentialgefälles E in Arosa und des mit dem Dobson-Spektrometer in Arosa gemessenen Ozongehalts O_3 in verschiedenen Schichten

ten bis 19 bzw. 24 km und dem Jahresgang des Potentialgefälles am Boden. Zwischen dem Gang des totalen Ozons und jenem des Potentialgefälles ist zwar auch noch eine deutliche Beziehung zu erkennen, die Übereinstimmung ist aber weniger gut. Da der Austausch, wie die Tagesgänge zeigen, einen großen Einfluß auf den Gang des Potentialgefälles hat, mußte noch die Frage geprüft werden, ob die Übereinstimmung mit dem Ozon nur zufällig, d. h. durch einen ähnlichen Jahresgang des Austausches erklärt werden könnte. Da in der Nacht der Austausch klein ist, wurden für eineinhalb Jahre die Monatsmittel nur aus den Nachtwerten des Potentials berechnet. Der eingezeichnete Gang der Nachtwerte zeigt aber im wesentlichen den gleichen Verlauf wie jener aller Werte, so daß wir diese Möglichkeit ausschließen können. Da auch der Jahresgang des Potentialgefälles auf der Tschuggenstation einen ähnlichen Verlauf wie jener von Arosa hat, glauben wir, daß eine echte Beziehung mit dem Ozon besteht.

Eine mögliche Erklärung für diese bis jetzt anscheinend unbekannte Beziehung scheint uns in der Tatsache gegeben, daß eine Zunahme der

Ozonkonzentration in den tieferen Schichten, d. h. hier unterhalb etwa 25 km, durch ein Absinken höherer Luftschichten bewirkt wird. Reed [6] fand, daß in New York ein starker Ozonanstieg immer mit einem markanten Absinken der Luft im 10, 13 und 16 km-Niveau verbunden ist. Dieses Absinken erhöht aber die Leitfähigkeit in der unteren Stratosphäre und führt damit zu einer Vergrößerung des Potentialgefälles in den bodennahen Schichten, da eine Erhöhung der Leitfähigkeit in der Stratosphäre die gleiche Wirkung hat wie eine tiefer liegende luftelektrische Ausgleichsschicht. Daß der Jahresgang des totalen Ozons weniger gut mit demjenigen des Potentialgefälles übereinstimmt, erklärt sich dann daraus, daß der Jahresgang des Ozons in den Höhen über 30 km gegenläufig zu jenem der unteren Schichten ist. Da aber die Schichten über etwa 25 km wegen ihrer guten Leitfähigkeit kaum mehr einen merklichen Einfluß auf das Potentialgefälle am Boden ausüben können, ist eine schlechtere Übereinstimmung mit dem Gang des totalen Ozons als mit dem der unteren Schichten zu erwarten. Es ist klar, daß für die Beurteilung des Jahresganges des Potentialgefälles auch jener der Leitfähigkeit in den bodennahen Schichten herangezogen werden muß, weil eine Veränderung der Leitfähigkeit bei sonst gleichbleibenden Bedingungen eine gegenläufige Veränderung des Potentialgefälles bewirkt. Tatsächlich kann der Jahresgang des am Boden gemessenen Potentialgefälles zum Teil durch den Jahresgang der Leitfähigkeit erklärt werden. Die Tatsache des Übereinstimmens von Ozon und Potentialgefälle wirkt dadurch aber noch erstaunlicher. Wir glauben den Grund darin zu sehen, daß das Absinken der höheren Luftschichten auch einen Einfluß auf die Leitfähigkeit der bodennahen Luft ausübt. Der Absinkvorgang verhindert eine weiträumige Verteilung der bodennahen kernreicheren Luft, was mit der Zeit zu einer größeren Kernkonzentration und damit zu einer kleineren Leitfähigkeit führt.

Der durch zunehmende Ozonkonzentration angezeigte Absinkvorgang hat also unseres Erachtens eine doppelte Wirkung: er erhöht die Leitfähigkeit in der Stratosphäre und vermindert sie in den bodennahen Schichten, was in beiden Fällen zu einer Erhöhung des Potentialgefälles am Boden führt.

Wir sind uns bewußt, daß die Richtigkeit dieser Erklärung durch weitere Messungen, vor allem durch solche der Leitfähigkeit und des Potentialgefälles in höheren Luftschichten, bestätigt werden muß.

Wir danken dem Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung für die erforderlichen Mittel und dem Regierungsrat des Kantons Aargau für die großzügige Entlastung von Unterrichtsverpflichtungen; durch ihr Entgegenkommen wurde diese Arbeit ermöglicht.

Den Herren Prof. Dr. J. Lugeon, Direktor der Meteorologischen Zentralanstalt in Zürich, und Kurdirektor W. Grob, Arosa, sind wir für das gewährte Gastrecht und mannigfache Unterstützungen und Diskussionen zu besonderem Dank verpflichtet.

Sehr wertvolle Hilfe erfuhren wir durch Fräulein Dr. Gertrud Perl, die Leiterin des Lichtklimatischen Observatoriums. Sie überwachte und bediente die Meßeinrichtungen und konnte uns in manchen Fragen beraten; wir danken ihr sehr dafür.

Literatur

1. Götz, F. W.: Klima und Wetter von Arosa. Frauenfeld, 1954.
2. Saxer, L., und W. Sigrist: Ein selbstkompensierender Elektrometerröhrenverstärker zur Registrierung des luftelektrischen Potentialgefälles. Arch. Met. Geoph. Biokl. A **10**, 96 (1957).
3. Kasemir, H. W.: Der Gewittergenerator im luftelektrischen Stromkreis. Dissertation Aachen, 1954.
4. Dütsch, H. U.: Vertical Ozone Distribution over Arosa. Final Report „Ozone and General Circulation in the Stratosphere". Contract No. AF (514)—905 (1959).
5. Dütsch, H. U.: Evaluation of the Umkehreffect by Means of a Digital Electronic Computer. Scientific Report No. 1 „Ozone and General Circulation in the Stratosphere". Contract No. AF (514)—905 (1957).
6. Reed, J. R.: The Effects of Atmospheric Motion on Ozone Distribution and Variations. Thesis, Mass. Inst. Tech., 1949.

551.577.11 : 551.577.22

(Institut für Meteorologie und Geophysik der Freien Universität Berlin)

Über die absolute Dauer konvektiver Starkregen

Von

G. Malkowski

Mit 3 Textabbildungen

Zusammenfassung. An Hand von Radarbeobachtungen wird gezeigt, daß die Dauer von konvektiven Starkregenfällen nur im ortsfesten Koordinatensystem häufig als gering erscheint; in einem mit der Niederschlagszelle mitbewegten Koordinatensystem kann sie nach den Wetterradarbeobachtungen viele Stunden betragen.

Summary. By means of weather radar observations it is shown that the duration of heavy convective rainfall appears to be short only in a locally fixed coordinate system. If the coordinate system is moved along with the convective cell the duration of rainfall may reach several hours.

Résumé. Les observations par radar montrent que la durée des fortes averses de nature convective, si elle semble souvent courte en un point fixe, peut par contre s'étendre sur maintes heures lorsqu'on la repère dans un système de référence entraîné avec la cellule nuageuse productrice.

Im Lehrbuch von Hann-Süring [*1*] findet man auf S. 477, unten, den Hinweis, daß es unzweckmäßig und irreführend ist, Regenfälle mit einer Dauer von Bruchteilen einer Stunde auf eine ganze Stunde umzurechnen, um ihre Intensität in mm/Std. zu erhalten und so miteinander vergleichbar zu machen. Als Begründung wird angeführt, daß gerade bei den stärksten Regenfällen die Dauer mitunter nur wenige Minuten beträgt, so daß die Umrechnung auf eine volle Stunde Niederschlagsintensitäten ergibt, die vielleicht nie vorkommen. Der unbefangene Leser kann hierbei leicht den Eindruck gewinnen, als ob die *absolute* Dauer dieser Starkniederschläge, d. h. die Lebensdauer der entsprechenden Wolkenpartien in der Schauer- oder Gewitterzelle, ebenso gering ist. Dies ist aber durchaus nicht der Fall, wie im Folgenden an Hand von Beobachtungen mit dem Berliner Wetterradargerät (siehe [*2*]) gezeigt werden soll.

Betrachtet man eine sommerliche Schauer- oder Gewitterzelle auf dem Bildschirm eines PPI-Radars (PPI = Plan Position Indicator = Panoramagerät), so erkennt man zunächst nur die äußeren Umrisse der Niederschlagszelle, da wegen des starken Radarechos, das diese Zellen liefern, der Bildschirm meist gesättigt ist, d. h. seine maximale Leucht-

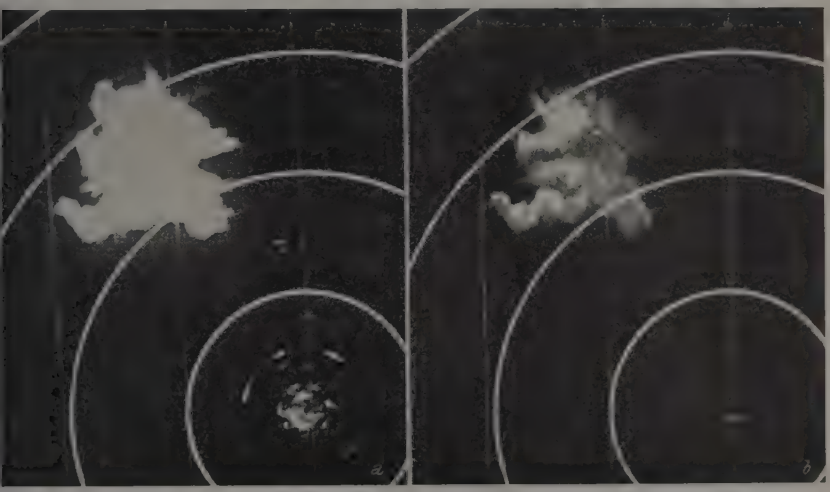

Abb. 1. Radarphoto eines Gewitters. a) Ohne künstliche Dämpfung. Bereich 50 km, jeder Ring 10 km. Man beachte die nahezu gleichmäßige Echointensitätsverteilung über den Querschnitt der Gewitterzelle, eine innere Struktur ist nicht zu erkennen (gesättigter Bildschirm). b) Bei einer künstlichen Dämpfung des Echosignals von 30 db. Man erkennt jetzt deutlich die Starkregenpartien innerhalb der Zelle. Die schwachen Konturen um diese Starkregen-Areale herum sind das Nachleuchtbild von a), das Bild b) wurde unmittelbar nach der Aufnahme a) gemacht

kraft erreicht hat (Abb. 1 *a*). Dämpft man jedoch mittels einer in den Verstärkerkanal des Radargerätes eingeschalteten geeichten Dämpfungsleitung in reproduzierbarer Weise das Empfangssignal um 10, 20, 30 usw. Dezibel (db), wobei das Dezibel bekanntermaßen durch:

$$d = 10 \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ [db]} \tag{1}$$

mit P_2 als der Echoleistung und P_1 als der Bezugsleistung (Ansprechleistung der Radaranlage in dem Punkt, wo die Dämpfungsleitung in den Verstärkerkanal eingeschaltet ist) definiert ist, so kann man das betreffende Radarecho „röntgen", indem man die Zonen gleicher Echostärke, d. h. gleicher db-Werte, feststellt. Diese Zonen gleicher (relativer) Echostärke fallen bei nicht allzu großer horizontaler Ausdehnung des Radarechos und bei Vernachlässigung von Absorptionseffekten mit den Zonen gleicher Niederschlagsintensität I (mm/Std.) zusammen, deren Lage

und Ausdehnung innerhalb der Zelle man dadurch feststellen kann. Abb. 1*b* zeigt als Beispiel dafür das Radarbild des Gewitters von Abb. 1*a* (um ein solches handelt es sich) bei einer Dämpfung von 30 db. Die schwachen Konturen auf diesem Bild stellen dabei das Nachleuchtbild der Aufnahme von Abb. 1*a* dar, während die hellen Areale die Zonen mit dem stärksten Niederschlag innerhalb der Zelle anzeigen. Die Echoleistung P_2 dieser bei einer Dämpfung von 30 db noch sichtbaren Partien der Niederschlagszelle beträgt nach Gl. (1) mindestens das 1000fache von P_1, der Ansprechleistung der Radaranlage. Es sind dies die Teile der Gewitterwolke, welche bei der Passage über einem Punkt auf der Erdoberfläche dort den „Wolkenbruch" liefern.

Dieses Beispiel und zahlreiche andere Fälle, die mit dem Berliner Wetterradargerät beobachtet werden konnten, zeigen, daß die Zonen mit dem stärksten Niederschlag ($I = 10$ bis 100 mm/Std.) nur einen Bruchteil der Gesamtoberfläche ausmachen, d. h. die Wolkenpartien, die den Starkregen erzeugen, haben nur geringe horizontale Ausdehnung von wenigen Kilometern. Der größte Teil der Niederschlagszelle besteht gewöhnlich aus Zonen schwächeren Niederschlages. Beobachtungen zeigten dabei, daß in ein und demselben Radarecho *gleichzeitig* Niederschlagsintensitäten von 0,1 und 100 mm/Std. vorkommen können, der horizontale Gradient von I, $\partial I/\partial n$ also große Werte annehmen kann. Dies wird auch von amerikanischen Beobachtungen unter Benutzung des sogenannten isoecho contour mapping [*3*, *4*] bestätigt, das umgekehrt wie die oben beschriebene Dämpfungsmethode arbeitet, indem hierbei gerade die hellsten Teile eines Radarechos durch einen im Radargerät erzeugten Hilfsimpuls ausgetastet werden und daher auf dem Bildschirm dunkel bleiben.

Vergleicht man nun die Niederschlagsregistrierungen am Boden mit den zugehörigen Radarbeobachtungen, so erkennt man bezüglich des Starkregens folgendes: In praktisch allen Fällen wird die kurze Dauer des „Wolkenbruchs" dadurch hervorgerufen, daß die Niederschlagszelle eine endliche (nichtverschwindende) Zugbewegung von einigen 10 km/Std. besitzt, die aus der Strömung der unteren Troposphäre (850 bis 500 mb) resultiert. Diese Zugbewegung, die in Einzelfällen bis zu 100 km/Std. betragen kann, hat nun in Verbindung mit der geringen horizontalen Ausdehnung der Starkregen-Areale zur Folge, daß an einem bestimmten Punkt auf der Erdoberfläche die Passage dieser Starkregenpartien und damit der Wolkenbruch nur kurze Zeit dauert. Wenn s die Ausdehnung eines Niederschlagsgebietes mit der Intensität I (mm/Std.) in Kilometern ist und v die Zuggeschwindigkeit desselben in km/Std., so beträgt die Dauer t des Niederschlages mit der Intensität I an einem Punkt auf der Erdoberfläche allgemein:

$$t = \frac{60 \cdot s}{v} \text{ (min)}. \tag{2}$$

Hat z. B. die Niederschlagszelle einen Durchmesser von 20 km, das Starkregengebiet innerhalb der Zelle mit $I = 50$ mm/Std. aber nur

eine Ausdehnung von 2 km und beträgt die Zuggeschwindigkeit der Zelle 40 km/Std. (ein häufig vorkommender Wert), so ist die Gesamtniederschlagsdauer an einem festen Punkt auf der Erdoberfläche 30 Minuten, der Wolkenbruch mit $I = 50$ mm/Std. dauert aber nur 3 min.

Nach den Radarbeobachtungen besitzt aber das Gebiet stärksten Niederschlages in der Zelle eine Lebensdauer von einer bis zu mehreren Stunden, in Einzelfällen sogar von 10 Stunden und darüber. Das besagt aber, in einem mit der Zelle mitbewegten Koordinatensystem würde

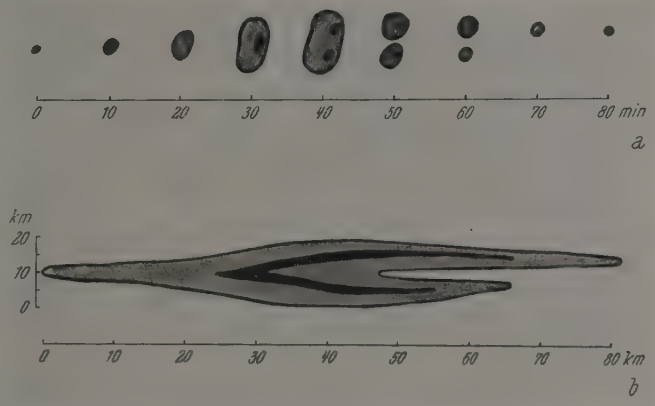

Abb. 2. Beispiel für die Entwicklung einer konvektiven Niederschlagszelle. a) Auf dem Bildschirm eines PPI-Radars. Die schwarzen Gebiete innerhalb der Zelle stellen die Starkregenpartien dar (Dämpfung: 30 db). b) Die von der mit 60 km/Std. ziehenden Niederschlagszelle am Erdboden bewirkte Niederschlagsverteilung. Die schwarzen Zonen stellen die vom Wolkenbruch überquerten Gebiete dar, d. h. die Spurlinien der Starkregenpartien

der Starkregen nicht etwa nur wenige Minuten, sondern eventuell viele Stunden, auf jeden Fall aber wesentlich länger dauern als am festen Standort, d. h. in einem ruhenden Koordinatensystem. Es ist also nicht so, daß die *Lebensdauer* der den Starkregen erzeugenden Wolkenpartien kurz ist, sondern die fast stets vorhandene Translation der Niederschlagszelle läßt die Regendauer nur am Erdboden häufig so kurz erscheinen. Die Extrapolation der Niederschlagsintensität I auf die volle Stunde ist daher an sich gerechtfertigt. Die Lage innerhalb der Zelle und die horizontale Ausdehnung des Starkregengebietes sowie seine Intensität sind dabei natürlich Schwankungen unterworfen, genau so wie die Form, Größe und Niederschlagsproduktion der Zelle selbst. Abb. 2*a* zeigt ein Beispiel dafür, wie man es häufig beobachten kann. Überträgt man Abb. 2*a* auf die Erdoberfläche und berücksichtigt dabei die Translation der Niederschlagszelle, so bekommt man die in Abb. 2*b* dargestellte Niederschlagsverteilung am Erdboden. Die schraffierten Gebiete bedeuten die Zonen schwächeren Niederschlages, die schwarzen die Wolken-

bruchzonen. Eine Meso- bzw. Mikroanalyse des Niederschlagsfeldes eines Gewitters oder großen Schauers müßte eine derartige Niederschlagsverteilung ergeben.

Bei der Bildung der konvektiven Niederschlagszelle entstehen zunächst Areale schwächeren Regens, innerhalb derer dann nach einigen 10 min der „Kern", das Gebiet stärksten Niederschlages, erscheint. Eine große Zelle kann dabei, wie auch Abb. 1 zeigt, mehrere Kerne haben. Bei der Rückbildung (Auflösung) der Zelle verschwinden zuerst die Starkregenpartien, zuletzt der schwächere Niederschlag. Dies hat man sich als Effekt des Entstehens und Nachlassens des Aufwindes in der Zelle vorzustellen, der in Abhängigkeit von der Labilität und der Feuchte die Niederschlagsproduktion steuert.

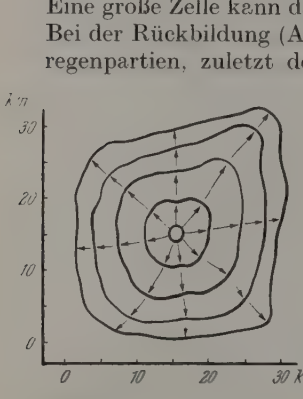

Abb. 3. Beispiel für die Ausbreitung des Niederschlages in einer ortsfesten Niederschlagszelle. Die Linien stellen den Umriß der sich entwickelnden Zelle in Abständen von 10 min dar, die Pfeile die (scheinbare) Expansion des ersten Radarechos. Man beachte, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit am größten zu Beginn der Zellbildung ist. Die Rückbildung (Auflösung) der Zelle geht häufig so vonstatten, daß die Zelle in mehrere kleine Teilzellen zerfällt, die sich dann einzeln abschwächen und schließlich vom Radarschirm verschwinden

Ist die Zuggeschwindigkeit der Niederschlagszelle < 10 km/Std., so tritt eine Erscheinung auf, die man in Anlehnung an die amerikanische Bezeichnung „propagation" (siehe [3], S. 101) als „Ausbreitung" bezeichnen kann. Darunter ist folgendes zu verstehen: Die mitunter rasche Entwicklung einer Niederschlagszelle (einige 10 min) hat bei einem nur sehr langsam ziehenden Schauer oder Gewitter zur Folge, daß sich der Niederschlag scheinbar von dem ersten, sehr kleinen erkennbaren Radarecho seitlich ausbreitet und so schließlich die einige 10 km große Zelle bildet. Diese Ausbreitung des Niederschlages, die bei rasch ziehenden Zellen zwar ebenfalls vorhanden, aber weniger auffällig ist, stellt bei ortsfesten Zellen ersichtlich die einzige Möglichkeit zur Ortsveränderung dar; sie kommt dadurch zustande, daß der Aufwind, der zunächst nur ein kleines Gebiet umfaßt, bei der weiteren Entwicklung der Zelle ein immer größeres Areal einbezieht, bis schließlich über eine Fläche von mehreren 100 km^2 Niederschlag fällt (Abb. 3). Diese Ausbreitung ist also letztlich nur ein Scheineffekt. Da auch das Gebiet maximalen Aufwindes in der Zelle, das den stärksten Niederschlag erzeugt, der Ausbreitung unterliegt, d. h. auch bei ortsfesten Zellen nicht immer über demselben Punkt auf der Erdoberfläche verharrt, hat selbst bei stationären Schauern oder Gewittern der Wolkenbruch an einer bestimmten Station mitunter nur eine kurze Dauer. Dieser, durch Radarbeobachtungen mit künstlicher Dämpfung oder isoecho contouring feststellbare Effekt der Ortsveränderlichkeit der Starkregenpartien innerhalb statio-

närer Zellen könnte also bei einem Beobachter auf dem Erdboden ebenfalls den Eindruck erwecken, als ob die Starkregenfälle auch *absolut* genommen von kurzer Dauer sind, was aber ersichtlich nicht der Fall zu sein braucht.

Nach den Berliner Radarbeobachtungen kann die Lebensdauer einzelner Zellen außerordentlich verschieden sein. So wurden häufig sehr kleine Schauerzellen (1 bis 2 km Durchmesser) beobachtet, die nur eine Lebensdauer von 10 min hatten und anscheinend nicht die Voraussetzung mitbrachten bzw. vorfanden, um die normale Entwicklung zu durchlaufen. Andererseits wurden Gewitterzellen von 5 bis 7 Stunden, in Einzelfällen sogar von 10 Stunden Lebensdauer festgestellt, die während dieser Zeit mehrere 100 km Weg zurücklegten. Die normale Lebensdauer von Schauerzellen liegt anscheinend zwischen einer halben und 2 Stunden, die von Gewitterzellen zwischen einer und 3 Stunden. Einen genaueren Wert angeben zu wollen, ist sinnlos, da bei derselben Wetterlage alle aufgeführten Zeitspannen von 10 min bis zu 10 Stunden nebeneinander vorkommen können.

Literatur

1. Hann-Süring: Lehrbuch der Meteorologie, 5. Aufl., Bd. I, S. 477. Leipzig, 1939.
2. Malkowski, G.: Betriebserfahrungen mit dem Berliner Wetter-Radargerät. Arch. Met. Geoph. Biokl. A **10**, 355 (1958).
3. Battan, L. J.: Radar Meteorology, S. 142. Chicago, 1959.
4. Kodaira, N.: An Iso-Echo Contouring Device. Proc. Sixth Weather Radar Conference, S. 307. Boston, 1957.

551.501.81

(Institut für Meteorologie und Geophysik der Freien Universität Berlin)

Radarechos und Isobarenkrümmung

Von

G. Malkowski

Mit 1 Textabbildung

Zusammenfassung. An Hand der seit Juni 1958 vom Berliner Institut für Meteorologie und Geophysik täglich veröffentlichten Radarbeobachtungen in der 12 Uhr GMT-Bodenwetterkarte wird der Zusammenhang zwischen dem Auftreten von Radarechos und der Isobarenkrümmung untersucht. Als Ergänzung wird noch die 500 mb-Karte vom gleichen Termin in Betracht gezogen.

Summary. The daily radar observations published in the 1200 GMT surface weather map of the Berlin Institute of Meteorology and Geophysics since June, 1958, are used to investigate the relationship between radar echoes and the curvature of isobars. The corresponding 500 mb charts are used as supplementary information.

Résumé. Utilisant les observations de radar publiées quotidiennement sur la carte du temps de 12 h T.U. depuis le mois de mai 1958 par l'Institut de Météorologie et de Géophysique de Berlin, l'auteur étudie la relation entre l'apparition d'échos de radar et la courbure des isobares. La carte du niveau de 500 mb de la même heure est aussi mise à contribution.

Seit Juni 1958 werden (wohl erstmalig) in der vom Institut für Meteorologie und Geophysik der Freien Universität Berlin täglich herausgegebenen Wetterkarte auch die 12 Uhr GMT-Wetterradarbeobachtungen in der zugehörigen Bodenkarte abgedruckt. Es bietet sich somit die einfache Gelegenheit, den Zusammenhang zwischen dem Vorkommen von niederschlagsbedingten Radarechos und gewissen in der Wetterkarte enthaltenen Parametern zu studieren. In der vorliegenden Untersuchung wurde das Auftreten von Radarechos, d. h. Niederschlägen, im Kontrollbereich des Berliner Wetterradars [*1*], der 220 km im Radius um Berlin-Dahlem herum beträgt, in Beziehung zu der Krümmung der Bodenisobaren, bzw. der 500 mb-Isohypsen gesetzt. Bekanntlich kann man wegen

des zum tiefen Druck gerichteten anisobaren Lufttransportes in der Bodenreibungsschicht eine zyklonale Isobarenkrümmung als Konvergenzindikator mit Tendenz zu aufsteigender, eine antizyklonale Isobarenkrümmung als Divergenzindikator mit Tendenz zu absteigender Bewegung deuten. Ein enger Zusammenhang zwischen dem Vorkommen von Radarechos und der Krümmung der Bodenisobaren ist daher wahrscheinlich und dem Synoptiker auch schon seit langem (bezüglich des Niederschlages) bekannt. Eine quantitative Untersuchung unter Benutzung von Radarbeobachtungen steht aber noch aus.

Zunächst sollen die Verhältnisse in bezug auf die 12 Uhr GMT-Bodenkarte, in der die Radarechos enthalten sind, erörtert werden. Von den insgesamt 823 Tagen (Juni 1958 bis August 1960) waren 435 = 53% ohne Radarechos, die restlichen 388 = 47% zeigten Niederschläge innerhalb 220 km um Berlin. Das bedeutet, daß mindestens jeder zweite Tag in Mitteldeutschland ein Niederschlagstag (in mesometeorologischem Sinne, nicht an einer bestimmten Station) war. Tabelle 1 zeigt die Häufigkeit der drei Krümmungsarten (+ = zyklonal, — = antizyklonal, 0 = geradlinige Isobaren) im Berliner Radarbereich ohne Rücksicht auf die Niederschlagsverhältnisse:

Tabelle 1. *Häufigkeit der verschiedenen Isobarenkrümmungen in der 12 Uhr GMT-Bodenkarte (Berliner Radarbereich)*

	+	—	0	Insgesamt
Fälle	429	336	58	823
%	52	41	7	100

Man sieht, die Tage mit zyklonaler Isobarenkrümmung sind etwas häufiger als die mit antizyklonaler Krümmung. Das liegt an der höheren Zyklonenhäufigkeit in der Breite von Berlin. Der Fall geradliniger Isobaren mußte bei der Betrachtung mit aufgenommen werden, da er wegen des kleinen Ausschnittes, den der Radarbereich von 220 km Radius auf der Bodenkarte einnimmt, doch in endlicher Anzahl vorkam. Tabelle 2 zeigt die Häufigkeitsverteilung der Krümmungen bei den echofreien Fällen:

Tabelle 2. *Krümmungshäufigkeit (Boden) bei Abwesenheit von Radarechos*

	. .	—	0	Insgesamt
Fälle	99	296	40	435
%	23	68	9	100

In zwei Dritteln aller Fälle war also die Isobarenkrümmung antizyklonal, aber auch nur in zwei Dritteln. In fast einem Viertel der nieder-

schlagslosen Fälle war die Isobarenkrümmung zyklonal, d. h. bodennahe Konvergenz allein braucht nicht immer zu Niederschlägen zu führen. Hierzu ist allerdings folgende Einschränkung zu machen, man betrachte Abb. 1: Es kann vorkommen, daß der Isobarenverlauf im Radarbereich *insgesamt* zyklonal ist, aber trotzdem kleinräumig betrachtet fast überall antizyklonal. Diesen zunächst paradoxen Befund erläutert Abb. 1. Hier laufen die Bodenisobaren von NW in den Radarbereich hinein, aber nach ESE hinaus, d. h. die Gesamtkrümmung ist zyklonal (gestrichelte Linien in Abb. 1). Infolge starken Druckanstieges hinter und schwächeren vor der Front ist aber die Isobarenkrümmung bis auf die singulären Punkte längs der Frontlinie überall antizyklonal. Eine nun in Bildung begriffene Niederschlagszelle (Schauer, Gewitter), die einen durchaus kleinräumigen Vorgang darstellt, z. B. in dem kleinen Kreis der Abb. 1, findet nun aber bei ihrer Entstehung (Cumulusstadium) eine antizyklonale Isobarenkrümmung vor und erreicht dadurch eventuell nicht das Reifestadium (Niederschlagsphase), so daß trotz *allgemeiner* zyklonaler Krümmung dann doch keinerlei Niederschläge im Radarbereich auftreten. Ein merklicher Teil der echofreien Fälle mit zyklonaler Isobarenkrümmung in Tabelle 2 geht nachweislich auf diesen Effekt zurück, so daß die angegebenen 23% mit zyklonaler Krümmung als zu hoch anzusehen sind.— Tabelle 3 gibt die Krümmungshäufigkeit an den Tagen mit Radarechos wieder:

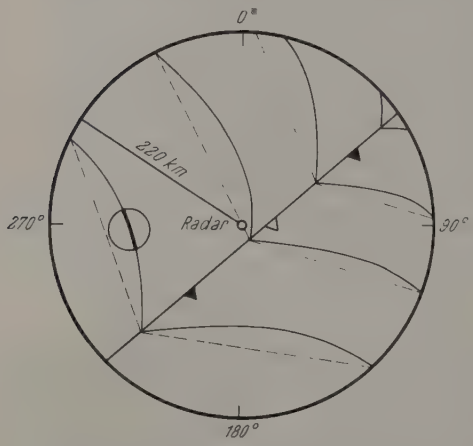

Abb. 1. Zyklonale oder antizyklonale Isobarenkrümmung im Radarbereich? Kleinräumig (z. B. innerhalb des kleinen Kreises) ist die Krümmung antizyklonal, „mittelräumig" (innerhalb des gesamten Radarbereiches) dagegen zyklonal

Tabelle 3. *Krümmungshäufigkeit (Boden) beim Auftreten von Radarechos*

	+	—	0	Insgesamt
Fälle	330	40	18	338
%	85	10	5	100

Hier sehen die Verhältnisse schon etwas günstiger aus, denn in 85% der Fälle mit Radarechos war die Isobarenkrümmung zyklonal und nur

in 10% antizyklonal. Die in manchen älteren Lehrbüchern zu findende Regel, wonach bei antizyklonaler Isobarenkrümmung keine Niederschläge auftreten, stimmt also zu einem hohen Prozentsatz.

Als Ergänzung wurden nun noch die Krümmungsverhältnisse in 500 mb bezüglich des Auftretens oder Nichtauftretens von Radarechos untersucht. Tabelle 4 gibt zunächst die Häufigkeit der verschiedenen Krümmungen in 500 mb ohne Rücksicht auf die Niederschlagsverhältnisse wieder:

Tabelle 4. *Häufigkeit der verschiedenen Isobarenkrümmungen in der 12 Uhr GMT-Höhenkarte 500 mb (Berliner Radarbereich)*

	+	—	0	Insgesamt
Fälle	384	387	52	823
%	47	47	6	100

In 500 mb sind die Verhältnisse also etwas ausgeglichener als am Boden (Tabelle 1), indem hier etwa die Hälfte aller Tage zyklonale, die andere Hälfte antizyklonale Isohypsenkrümmung aufweist. — Tabelle 5 gibt die Häufigkeit der verschiedenen Krümmungen bei den echofreien Fällen wieder:

Tabelle 5. *Krümmungshäufigkeit (500 mb) bei Abwesenheit von Radarechos*

	+	—	0	Insgesamt
Fälle	101	310	24	435
%	23	71	6	100

In 71% der echofreien Fälle war also die Krümmung in der Höhe antizyklonal, doch treten immerhin wieder fast ein Viertel Fälle mit zyklonaler Isohypsenkrümmung auf. Der in Abb. 1 dargestellte Effekt entfällt hierbei. Wegen der in 500 mb meist gegebenen geostrophischen Beziehung zwischen Wind- und Druckfeld kann man die zyklonale und antizyklonale Isohypsenkrümmung nicht mehr einfach als Konvergenz- bzw. Divergenzeffekte deuten, sondern nur als Anzeichen des Vorhandenseins von Kaltluft bzw. Warmluft in den Schichten darunter. Da aber Kaltluft wegen der meist labilen Schichtung als Indikator für aufsteigende, Warmluft wegen der meist stabilen Schichtung als Indikator für absteigende oder zumindest nicht aufsteigende Bewegung angesehen werden kann, ist auch hier ein entsprechender Zusammenhang zwischen

Isohypsen-Krümmung und der Häufigkeit von Radarechos zu erwarten. — Tabelle 6 zeigt die Krümmungshäufigkeit an den Tagen mit Radarechos:

Tabelle 6. *Krümmungshäufigkeit (500 mb) beim Auftreten von Radarechos*

	+	—	0	Insgesamt
Fälle	283	77	28	388
%	73	20	7	100

Man kann Tabelle 6 einfach als Umkehrung von Tabelle 5 ansehen, in einem Fünftel aller Fälle traten trotz antizyklonaler Isohypsenkrümmung Niederschläge auf.

Man kann nun die am Boden und in 500 mb gefundenen Krümmungsverhältnisse durch Auszählen entsprechender Konstellationen Krümmung Boden/Krümmung 500 mb kombinieren. Tabelle 7 zeigt zunächst die Häufigkeit der verschiedenen möglichen Konstellationen Krümmung Boden/Krümmung 500 mb für den gesamten Zeitraum ohne Rücksicht auf die Niederschlagsverhältnisse (das 1. Symbol +, — oder 0 bezieht sich auf den Boden):

Tabelle 7. *Häufigkeit der einzelnen Konstellationen Krümmung Boden/Krümmung 500 mb im untersuchten Zeitraum (Juni 1958 bis August 1960, Berliner Radarbereich)*

Konfig.	++	+—	+0	—+	——	—0	0+	0—	00	insgesamt
Fälle	277	127	25	87	227	22	20	33	5	823
%	34	15	3	11	27	3	2	4	1	100

Tabelle 7 läßt erkennen, daß in einem Drittel aller Fälle sowohl am Boden als auch in 500 mb eine zyklonale Krümmung vorlag (normale Tieflage), dann folgt mit etwa der gleichen Häufigkeit die normale Hochlage (—), dann die Kombination + — (abziehendes Tief, in der Höhe macht sich schon der nachfolgende Hochkeil bemerkbar) und schließlich mit 11% die Kombination — + (abziehendes Hoch, in der Höhe macht sich schon der nachfolgende Trog bemerkbar). Die anderen Kombinationen mit den seltenen Fällen gradliniger Isolinien sind weniger häufiger und daher auch weniger wichtig.

In Tabelle 8 sieht man die Verteilung der verschiedenen Krümmungskombinationen (das 1. Symbol bezieht sich auf den Boden) bei den echofreien Fällen:

Tabelle 8. *Häufigkeit der einzelnen Konstellationen Krümmung Boden/Krümmung 500 mb bei Abwesenheit von Radarechos*

Konfig.	++	+—	+0	—+	——	—0	0+	0—	00	Insgesamt
Fälle	29	67	3	63	214	19	9	29	2	435
%	7	15	1	14	49	4	2	7	1	100

Die meisten echofreien Fälle treten also bei der Zentralhochlage (— —) auf, die Zentraltieflage (+ +) ist nur mit 7% vertreten. Faßt man aus Tabelle 8 alle Fälle mit mindestens einer antizyklonalen Isolinien-Krümmung in einem Niveau zusammen, so ergibt sich, daß in *89%* der echofreien Fälle mindestens in einem Niveau (Boden oder 500 mb oder beide) eine antizyklonale Isobaren- bzw. Isohypsenkrümmung vorlag. Dieses Ergebnis kann man für Prognosezwecke nun auch andersherum lesen und sagen, daß bei antizyklonaler Isolinienkrümmung am Boden oder in 500 mb (was man aus den Vorhersagekarten für dieses Niveau entnehmen kann) oder in beiden Niveaus in einem großen Teil der Fälle *keine* Niederschläge auftreten werden.

Tabelle 9 zeigt die Verteilung der einzelnen Krümmungskonfigurationen beim Vorhandensein von Radarechos:

Tabelle 9. *Häufigkeit der einzelnen Konstellationen Krümmung Boden/Krümmung 500 mb beim Auftreten von Radarechos*

Konfig.	++	+—	+0	—+	——	—0	0+	0—	00	Insgesamt
Fälle	248	60	22	24	13	3	11	4	3	388
%	64	15	6	6	3	1	3	1	1	100

Beim Vorhandensein von Radarechos liegt also in rund zwei Dritteln der Fälle die normale Tieflage (+ +) vor, dann folgt die Kombination + —, was eventuell als ein Anzeichen für eine stärkere Bedeutung der bodennahen Konvergenzen gegenüber den Effekten in den höheren Schichten bei der Niederschlagsbildung angesehen werden kann, und dann die anderen Kombinationen. Die normale Hochlage ist mit 3% vertreten, d. h. es kann im Einzelfall auch Niederschläge bei antizyklonaler Krümmung in beiden Niveaus geben. Die nähere Untersuchung einiger dieser Fälle zeigte, daß hierbei trotz stabiler Schichtung im Morgentemp die mittägliche Überhitzung des Erdbodens und der anliegenden bodennahen Luftschichten so groß war, daß mit Niederschlägen verbundene konvektive Umlagerungen auftreten. Allerdings waren die dabei festgestellten Radarechos nur sehr klein (einige 100 m im Durchmesser) und auch weniger zahlreich als bei den anderen Lagen. Ein anderer Teil der Fälle, mit Radarechos bei der Hochlage (— —) geht auf unbedeutende Sprühregen-

oder Schneefälle bei winterlichen Zentralhochlagen zurück, wo bei stabiler Schichtung aus der Stratus- oder Stratocumulusdecke infolge irgendwelcher kolloid-meteorologischer Prozesse einzelne leichte Niederschläge fielen. Die dabei beobachteten Radarechos waren nur sehr schwach und nur wenige Kilometer weit sichtbar und wurden mehr der Vollständigkeit halber in die 12 Uhr GMT-Bodenkarte eingezeichnet. — Faßt man in Tabelle 9 wie bei Tabelle 8 alle Fälle mit mindestens einer jetzt zyklonalen Isolinienkrümmung in einem Niveau zusammen, so findet man, daß in 94% aller Fälle mit Radarechos wenigstens in einem Niveau eine zyklonale Isobaren- bzw. Isohypsenkrümmung vorlag. Besonders in dem Fall, wo die Vorhersagekarten Boden und 500 mb in *beiden* Niveaus eine zyklonale Krümmung zeigen, kann bei der Vorhersage mit Niederschlägen gerechnet werden.

Es sei hier daran erinnert, daß die angegebenen Zusammenhänge in mesometeorologischem Sinne zu verstehen sind. Bei einer Punktvorhersage, z. B. für die Radarstation selbst, liegen die Verhältnisse ungünstiger. Da aber die meisten Vorhersagen als Flächenvorhersage über einen größeren Landesteil, z. B. über den Hörbarkeitsbereich eines Mittelwellenrundfunksenders (einige 100 km am Tage) gegeben werden, ist die Voraussetzung mesometeorologischer Anwendung meistens gegeben.

Schlußfolgerungen

Die bei der vorliegenden Untersuchung erhaltenen Ergebnisse zeigen, daß der zu erwartende enge Zusammenhang zwischen dem Auftreten bzw. Nichtauftreten von Radarechos und der Krümmung der Isobaren bzw. Isohypsen am Boden und in 500 mb besteht. Allerdings zeigt sich auch, daß die Krümmungsverhältnisse *allein* nicht den Effekt der Niederschlagsbildung beherrschen, sondern daß noch andere Parameter dabei eine Rolle spielen müssen. Für Prognosezwecke kann man einige der gefundenen Zusammenhänge benutzen, indem man aus den Vorhersagekarten für Boden und 500 mb die zu erwartende Krümmungskonfiguration entnimmt und aus den entsprechenden Tabellen (Tabellen 8 und 9) die zugehörige Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) ermittelt. Die mesometeorologische Abfassung der Vorhersage muß jedoch gegeben sein.

Literatur

1. Malkowski, G.: Betriebserfahrungen mit dem Berliner Wetter-Radargerät. Arch. Met. Geoph. Biokl. **A 10**, 355 (1958).

551.511.6

(Department of Meteorology, The Hebrew University, Jerusalem, Israel)

On an Effect of the Integral Scale of Turbulence on One-dimensional Spectra

By

J. Neumann

Summary. Assuming that in isotropic and stationary turbulence the Lagrangian correlation functions of the velocity components are of a simple exponential form, it is shown that the greater the integral scale of turbulence, the lower is the one-dimensional wave number to which a minus five-thirds law will appear to hold. It is pointed out, following a paper by GIFFORD, that the apparent extension to low one-dimensional wave numbers of a minus-five-thirds law, does not necessarily mean that KOLMOGOROFF's inertial subrange of the three-dimensional turbulence extends to low (three-dimensional) wave numbers.

Zusammenfassung. Unter der Annahme, daß die Korrelationsfunktionen von LAGRANGE für isotrope und stationäre Turbulenz eine einfache exponentielle Form haben, wird bewiesen, daß, je größer das Integralmaß der Turbulenz ist, desto niedriger die eindimensionale Wellenzahl ist, bis zu der ein $-5/3$-Gesetz zu gelten scheint. Anschließend an eine Arbeit von GIFFORD wird betont, daß die scheinbare Erweiterung in Richtung auf niedrige eindimensionale Wellenzahlen nicht notwendigerweise bedeutet, daß KOLMOGOROFFS Inertialteilbereich der dreidimensionalen Turbulenz sich bis zu niedrigen (dreidimensionalen) Wellenzahlen erstreckt.

Résumé. En supposant que les fonctions de corrélation lagrangiennes des composantes de vitesse de la turbulence isotropique et stationnaire sont d'une forme exponentielle simple, il est demontré que l'échelle intégrale de turbulence est d'autant plus grande que le nombre de l'onde unidimensionelle est petit, nombre, auquel une loi de $-5/3$ apparaît convenir. On pourra remarquer que, suivant un ouvrage de GIFFORD, l'étendue apparente des petits nombres de l'onde unidimensionelle, ne signifie pas nécessairement que le rang d'inertie de KOLMOGOROFF à propos de la turbulence en trois dimensions s'étend aux petits nombres de l'onde.

1. Introduction

In a recent paper Gifford [1] has directed attention to the erroneous inferences to which we are liable to be led when attempting to give physical interpretation to one-dimensional energy spectra, i. e. to the spectra that are usually measured in turbulent flow. As pointed out by Gifford, the range of eddy sizes which really fall within Kolmogoroff's inertial subrange may be overestimated by attaching physical significance to the whole of any minus five-thirds range of one-dimensional spectra.

It is the purpose of this paper to point out another feature of one-dimensional energy spectra which may lead to a physically incorrect estimate of the low wave-number end of Kolmogoroff's inertial subrange. It is shown below that *the greater the (Lagrangian) integral scale of turbulence, the lower is the one-dimensional wave number to which a minus five-thirds law will apply in the (one-dimensional) spectrum.* Since in the atmosphere the scale of turbulence is usually great, one should then find in the one-dimensional spectra, the spectra that are normally observed, the minus five-thirds law to extend to unexpectedly low wave numbers. This has, indeed, been observed by, e. g., MacCready [5], Hutchings [4], R. J. Taylor [8] and others. Richardson's [7] famous empirical relation for the diffusion coefficient K in the atmosphere, viz. $K = 0.2\, L^{2/3}$, where L is a characteristic linear scale of the turbulence, is but another manifestation of the effect in question.

2. One-dimensional Spectrum Function

It is known (e. g, Wang and Uhlenbeck [10]) that in the case of a Gaussian-Markoffian process the autocorrelation function is a simple exponential function (of time, usually). If, e. g., we assume that solid particles are suspended in a turbulent fluid and that these particles are small enough to follow the fluid motions faithfully, the Gaussian-Markoffian process may be the fluctuating value of a velocity component for anyone of the "diffusing" particles. In that case, the autocorrelation function of the process corresponds to the Lagrangian correlation function of the turbulence. Denoting the Lagrangian correlation function by $R(\overline{u^2}^{1/2} k*t)$, we assume[1]

$$R(\overline{u^2}^{1/2} k*t) = e^{-\overline{u^2}^{1/2} k*t}. \tag{1}$$

[1] It is known that the velocity correlation function of turbulence must be parabolic at its vertex. Consequently, a simple exponential function will have no physical significance at the vertex, even though it may represent a good approximation to the true, physical, correlation function elsewhere. In fact, there is an increasing body of experimental evidence that, on the whole, measured Langrangian correlations can be well described by simple exponential functions. For literature, see some of the papers quoted by Hinze ([3], p. 52) and by Hay and Pasquill ([2], especially papers quoted on p. 361).

t representing time and $(\overline{u^2}^{1/2}k^*)^{-1}$ the Lagrangian time scale of turbulence: $\overline{u^2}^{1/2}$ is the Lagrangian turbulent velocity and k^* a wave number corresponding to the linear scale of the turbulence, i. e., the Lagrangian time scale is thought to be given by the product of a characteristic Lagrangian velocity into the reciprocal of a characteristic length. It follows from the assumption expressed by eq. (4) and from eqs. (5) and (6) below that $\overline{u^2}^{1/2}k^* = n^*/g^*$, where n^* is the frequency associated with k^* and g^* a non-dimensional constant related to the spectrum of turbulence (for details, see eqs. (5) and (6)). We thus assume,

$$R\,(n^*t/g^*) = e^{-(n^*/g^*)\,t}. \tag{1a}$$

Let $f\,(\varkappa)$ be a one-dimensional spectrum function of the turbulence expressed in terms of a non-dimensional wave number $\varkappa = k/k^*$, where k is a one-dimensional wave number. Since the spectrum function is the Fourier cosine transform of the correlation function,

$$f\,(\varkappa) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(n^*t/g^*)\cos n\,t\,d\,(n^*t/g^*), \tag{2}$$

if we assume that in (2) the frequency n is expressed in terms of wave number $\varkappa$. To be able to proceed, we need the relationship linking n and $\varkappa$.

The ratio frequency to wave number, n/k, is a velocity. For turbulent motion this ratio is a function of wave number. Let $g = g\,(\varkappa)$ be a non-dimensional function such that the ratio (n/kg) be equal to a constant velocity. To make this constant ratio physically meaningful, the ratio must give a constant velocity which is characteristic for the turbulence. In the case of an isotropic, homogeneous and stationary turbulence, the characteristic, constant, velocity is the turbulent velocity $\overline{u^2}^{1/2}$. Hence, we write

$$\frac{n}{kg} = \overline{u^2}^{1/2}, \quad \text{or } n = \overline{u^2}^{1/2}\,kg. \tag{3}$$

The latter form gives rise to the conjecture that $g = g\,(\varkappa)$ represents the spectral contribution of the various wave numbers toward producing the frequency n. But, for a given frequency, i. e. a fluctuation on a given time scale τ ("Abfallszeit": WEIZSÄCKER [9]), during a period of length τ the contribution from small wave numbers, i. e. from fluctuations on time scales greater than τ, will be relatively small compared with the contributions from large wave numbers, i. e. from fluctuations on time scales smaller than τ. We therefore assume, and in this we follow OGURA [6], that

$$g\,(\varkappa) = \left[\int_\varkappa^\infty f\,(z)\,dz\right]^{1/2}, \tag{4}$$

$$g\,(0) = 1, \quad g\,(\infty) = 0. \tag{4a}$$

From (3) and (4),

$$n = \overline{u^2}^{1/2} k \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz \right]^{1/2}. \tag{5}$$

If $g^* = [g]_{k=k^*} = g\,(1)$, then from (3) [or (5)],

$$n = (n^*/g^*)\, \varkappa\, g, \tag{6}$$

and from (2) and (6),

$$f(\varkappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(n^* t/g^*) \left[\cos (n^* t/g^*)\, \varkappa\, g \right] d(n^* t/g^*). \tag{7}$$

It follows from the theory of integral transforms that if the function $R(n^* t/g^*)$ is of the form $e^{-(n^* t/g^*)}$, then its Fourier cosine transform, involving the argument of the cosine in (7), is

$$f(\varkappa) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(\varkappa g)'}{1 + (\varkappa g)^2}, \tag{8}$$

the dash denoting differentiation with respect to $\varkappa$. But, from (4),

$$f(\varkappa) = -2\, g g', \tag{9}$$

so that, from (8) and (9), we get the total, first-order non-linear, differential equation

$$g' (\varkappa + \pi\, g + \pi\, \varkappa^2\, g^3) + g = 0. \tag{10}$$

The solution of this differential equation, satisfying the boundary condition $g(0) = 1$ ((4a) above), is (see Appendix)

$$\varkappa = \frac{1}{g} \cot\left(\frac{\pi}{2} g^2 \right), \tag{11}$$

or,

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{\pi}{2} \cdot \left[g^3 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot g^7 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \cdot \frac{2}{15} \cdot g^{11} + \cdots \right]. \tag{12}$$

To obtain the spectrum function, we first have to revert this series, i. e. state g in terms of $\varkappa$.

In view of the fact that both $1/\varkappa$ and g are zero for $\varkappa = \infty$, (12) may be reverted to give a power series for g in terms of $1/\varkappa$. But, as (12) begins with the third power of g, three reversions of it are possible. The reversion of physical interest is

$$g = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/3} \cdot \frac{1}{\varkappa^{1/3}} - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2/3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\varkappa^{4/3}} - \cdots \tag{13}$$

By considering $\varkappa$ a complex variable, it may be shown using known results of function theory (see, e. g., HURWITZ-COURANT [11], Chapter 7),

that the reversion (13) is convergent for all $\varkappa > \varkappa_c$, where $0 < \varkappa_c < 1$. i. e. (13) is convergent for all $k > k_c$, $0 < k_c < k^*$.

From (9) and (13), for $k > k_c$, the spectrum function is

$$f(\varkappa) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2/3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\varkappa^{5/3}} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/3} \cdot \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{\varkappa^{8/3}} \cdots \tag{14}$$

3. Discussion

In the foregoing section we have arrived at an expansion of the one-dimensional spectrum function for wave numbers greater than a wave number k_c, $0 < k_c < k^*$. The leading term of the expansion being (constant) $\cdot (k/k^*)^{-5/3}$, the expansion reduces at large wave numbers to a minus five-thirds law, corresponding, in its general form at least, to the well-known minus five-thirds law for the inertial subrange of the three-dimensional spectrum in KOLMOGOROFF's model for locally isotropic turbulence at high Reynolds numbers. Let us call by the name "apparent inertial subrange" the range of wave numbers in the one-dimensional spectrum for which a minus five-thirds law is valid in a formal, mathematical, sense. Then, (14) is the one-dimensional spectrum function for a range of wave numbers which include the apparent inertial subrange as well as a range of wave numbers that are smaller than the wave numbers of the apparent inertial subrange and, yet, larger than a wave number k_c which is finite. Therefore, it will be justified to regard the low-wave-number end of the one-dimensional spectrum (14) as a range of intermediate wave numbers.

The fact that the leading term of (14) is (constant) $\cdot (k/k^*)^{-5/3}$ means that the smaller k^*, i. e. *the greater the scale of turbulence, the lower will be the wave number k to which a minus five-thirds law will "hold" — in the one-dimensional spectrum.* It is to be expected that various predictions of KOLMOGOROFF's model for the inertial subrange in three-dimensional turbulence, e. g. the forms of correlation function, should appear to "hold" down to low, one-dimensional, wave numbers and the greater the scale of turbulence, the lower the wave numbers in question should be. Indeed, these inferences seem to be borne out by observations of, e. g., MACCREADY [5], HUTCHINGS [4] and R. J. TAYLOR [8]. GIFFORD's [1] paper warns us, however, that the apparent extension of the minus five-thirds law to low wave numbers in the one-dimensional spectrum does not mean that the inertial subrange of physical significance, i. e. the inertial subrange in the three-dimensional turbulence, extends to low wave numbers.

Appendix

Solution of the Differential Equation (10)

If in eq. (10) we invert the roles of $\varkappa$ and g, i. e., if $\varkappa$ is considered the dependent variable, we have

$$\frac{d\varkappa}{dg} = -\frac{\varkappa}{g} - \pi - \pi\varkappa^2 g^2 . \tag{15}$$

Let γ be a function of g, $\gamma = g^2/2$, and let, in turn, η be a function of γ. Introducing the substitution

$$\varkappa = \frac{d\eta/d\gamma}{\pi g \eta} = \frac{\eta'}{\pi g \eta}, \tag{16}$$

(where the dash now denotes differentiation with respect to γ) and differentiating (16) with respect to g, one finds

$$\frac{d\varkappa}{dg} = \frac{\eta''}{\pi\eta} - \frac{\varkappa}{g} - \pi\varkappa^2 g^2 . \tag{17}$$

Equating the right-hand sides of (15) and (17), they reduce to

$$\eta'' + \pi^2\eta = 0.$$

The solution of this simple, well-known, differential equation is

$$\begin{aligned}\eta &= C_1 \cos \pi\gamma + C_2 \sin \pi\gamma \\ &= C_1 \cos \frac{\pi}{2} g^2 + C_2 \sin \frac{\pi}{2} g^2\end{aligned} \tag{18}$$

since $\gamma = g^2/2$. On inserting (18) into (16), we have

$$\varkappa = \frac{1}{g} \cdot \frac{-C_1 \sin \frac{\pi}{2} g^2 + C_2 \cos \frac{\pi}{2} g^2}{C_1 \cos \frac{\pi}{2} g^2 + C_2 \sin \frac{\pi}{2} g^2}.$$

The boundary condition being $g = 1$ for $\varkappa = 0$ [see (4a) above], we conclude that C_1 must vanish, or

$$\varkappa = \frac{1}{g} \cot\left(\frac{\pi}{2} g^2\right),$$

as stated under eq. (11).

References

1. GIFFORD, F., JR.: The Interpretation of Meteorological Spectra and Correlations. J. Met. **16**, 344—346 (1959).
2. HAY, J. S., and F. PASQUILL: Diffusion from a Continuous Source in Relation to the Spectrum and Scale of Turbulence, pp. 345—365 in „Atmospheric Diffusion and Air Pollution" (ed. F. N. FRENKIEL and P. A. SHEPPARD). New York-London: Academic Press. 1959.
3. HINZE, J. O.: Turbulence. New York: McGraw-Hill. 1959.
4. HUTCHINGS, J. W.: Turbulence Theory Applied to Large-scale Atmospheric Phenomena. J. Met. **12**, 263—271 (1955).
5. MACCREADY, P. B., JR.: Structure of Atmospheric Turbulence. J. Met. **10**, 434—449 (1953).
6. OGURA, Y.: The Relation between the Space- and Time-correlation Function in a Turbulent Flow. J. Met. Soc. Japan, 2nd Series, **31**, 355—369 (1953).

7. Richardson, L. F.: Atmospheric Diffusion on a Distance Neighbour Graph. Proc. Roy. Soc. A **110**, 709—737 (1926).
8. Taylor, R. J.: Some Observations of Wind Velocity Autocorrelations in the Lowest Layers of the Atmosphere. Austr. J. Physics **8**, 335—344 (1955).
9. Weizsäcker, C. F. von: Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen. Z. Physik **124**, 614—627 (1948).
10. Wang, M. C., and G. E. Uhlenbeck: On the Theory of Brownian Motion II. Rev. Mod. Physics **17**, 323—342 (1945).
11. Hurwitz, A., und R. Courant: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Berlin: Springer. 1925.

Buchbesprechungen

Encyclopaedic Dictionary of Physics. General, Nuclear, Solid State, Molecular Chemical, Metal and Vacuum Physics, Astronomy, Geophysics, Biophysics and Related Subjects. Vol. I. Herausgegeben von J. Thewlis. Mit zahlreichen Textabb., XV, 800 S. Oxford-London-New York-Paris: Pergamon Press. 1961. Preis des Gesamtwerkes £ 80.

Die rasche Entwicklung der modernen Physik und ihrer Anwendungsgebiete hat es mit sich gebracht, daß neben der Erweiterung der Erkenntnisse auch vielfach neue Begriffe eingeführt wurden und das Wissensgut einen derartigen Umfang angenommen hat, daß es schon für den einzelnen Physiker, noch mehr aber für Interessenten aus den Grenzgebieten der Physik und aus Zweigen der Wissenschaft, die besonders auf die Anwendung physikalischer Forschungsergebnisse in ihrer eigenen wissenschaftlichen Disziplin angewiesen sind, nicht nur immer schwieriger wird, das Gesamtgebiet der Physik und ihrer neuesten Entwicklungen zu überblicken, sondern bereits auch schwierig wird, sich darüber aus Lehrbüchern oder Monographien rasch Aufschluß zu beschaffen. Diese Schwierigkeiten werden naturgemäß durch ein Wörterbuch wesentlich verringert, in dem man sehr einfach und rasch über jeden Begriff Auskunft finden kann. Es ist daher verständlich, daß in unserer Zeit der raschen wissenschaftlichen und technischen Entwicklung der Wert eines wissenschaftlichen Wörterbuches immer mehr steigen muß. Ein derartiges Wörterbuch wird aber seinen Zweck um so mehr erfüllen können, je mehr Einzelbegriffe oder Stichwörter es umfaßt und je ausführlicher die Erläuterungen zu den einzelnen Begriffen gehalten werden können. Dies bedingt aber, daß bei dem heutigen Stand der Wissenschaft ein voll befriedigendes und zweckmäßiges Wörterbuch bereits ein sehr umfangreiches Werk sein muß.

In geradezu idealer Art erfüllt das hier anzukündigende enzyklopädische Wörterbuch der Physik alle Wünsche, die man an ein derartiges Werk stellen kann: Es ist seinem Umfang nach so geplant, daß es möglich ist, die behandelten Begriffe und Stichwörter hinreichend ausführlich zu erläutern und dazu auch noch zur Veranschaulichung vielfach graphische Darstellungen einzufügen. Die Großzügigkeit der Anlage des ganzen Unternehmens geht schon daraus hervor, daß in dem nun vorliegenden 1. Band auf 800 Seiten nur Begriffe mit Anfangsbuchstaben A bis C erläutert werden, wobei einzelne Beiträge bis zu 2000 Worte enthalten. Das Werk umfaßt wirklich das Gesamtgebiet der Physik und seiner Anwendungen sowie einschlägige Begriffe aus Nachbarwissenschaften wie Mathematik, Astronomie, Geophysik, Meteorologie, Biophysik, Photographie, Chemie, Kristallographie, Metallurgie und andere.

Als Verfasser der einzelnen Beiträge des gesamten Werkes waren mehr als 3000 Forscher tätig, die als Spezialisten in ihrem engeren Fachgebiet Gewähr dafür bieten, daß auch der modernste Stand der Forschung, soweit als möglich, berücksichtigt worden ist. In der Auswahl der in Einzelbeiträgen behandelten Begriffe und in der alphabetischen Anordnung ist auf die Möglichkeit einer raschen Information über Einzelheiten und auch über Zusammenhänge zwischen verschiedenen Beziehungen sowie über ähnliche Instrumente und Meßverfahren wie auch über miteinander zusammenhängende Erscheinungen geschickt Bedacht genommen worden. Diesem Zwecke dienen auch am Ende zahlreicher Artikel angefügte Hinweise auf andere Beiträge und Literaturangaben. Es muß auch hervorgehoben werden, daß die einzelnen Beiträge so verständlich abgefaßt sind, daß im allgemeinen keine hohen Spezialkenntnisse vorausgesetzt werden.

Das neue enzyklopädische Wörterbuch der Physik stellt unzweifelhaft ein Standardwerk dar, das in keiner physikalischen Bibliothek fehlen sollte und auch den Interessenten aus anderen Wissensgebieten und darunter im besonderen auch dem Geophysiker und Meteorologen ein sehr wertvoller und praktischer Helfer und Berater sein wird.

F. Steinhauser, Wien.

Physical Oceanography. Von A. Defant. Vol. I: Mit 340 Textabb., XVI, 729 S. — Vol. II: Mit 239 Textabb., 4 Kartenbeilagen, VIII, 598 S. Oxford-London-New York-Paris: Pergamon Press. 1961. £ 10 10s. net.

In dem vorliegenden Werk wird eine großangelegte Darstellung des Gesamtgebietes der physikalischen Ozeanographie geboten, die alle Probleme dieses umfangreichen Wissensgebietes in umfassender Schau behandelt und damit mit dem Gesamtergebnis der Forschung in einem Zweig der geophysikalischen Wissenschaft bekannt macht, der gerade in neuerer Zeit in rascher Entwicklung begriffen ist, die sowohl die Gewinnung von Beobachtungsmaterial wie auch dessen theoretische Bearbeitung betrifft. Dies verleiht dem Buch größte Aktualität und es muß dem Autor für den ungemein wertvollen Dienst, den er mit diesem monumentalen Werk seiner Wissenschaft geleistet hat, besonderer Dank ausgesprochen, zugleich aber auch die Bewunderung dafür zum Ausdruck gebracht werden, daß es ihm möglich war, ein derartig umfangreiches Wissensgebiet mit solcher Gründlichkeit und Fachkenntnis in allen ihren Teilgebieten als einzelner Forscher selbst zu bearbeiten. Dies stellt unzweifelhaft eine für die heutige Zeit einzigartige persönliche Leistung dar, die im besonderen auch in der Geschlossenheit und Klarheit der Darstellung dem Gesamtwerke zugute kommt. Seine reiche in langjähriger und fruchtbarer Lehr- und Forschungstätigkeit auf ozeanographischem und meteorologischem Gebiet gewonnene Erfahrung hat ihn wie keinen anderen zu diesem einmaligen Unternehmen besonders befähigt.

Im ersten Band werden zunächst in großer Ausführlichkeit auf nahezu 300 Seiten die räumlichen, materiellen und energetischen Charakteristiken der Wasserhülle der Erde auf Grund von Beobachtungsergebnissen und in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit wie auch zeitlichen Variation dargestellt. Man findet darin Ausführungen über die horizontale Ausdehnung und dreidimensionale Struktur der Ozeane, über die physikalischen und chemischen Eigenschaften des Meerwassers und im besonderen über die dreidimensionale Verteilung und zeitlichen Änderungen von Temperatur, Salzgehalt und Dichte

des Meerwassers, über die Stabilität der Schichtung, über die Beziehung zwischen Temperatur und Salzgehalt und ihren Zusammenhang mit Mischungsprozessen, über die Oberflächenverdunstung der Ozeane und den Wasserhaushalt der Erde sowie über die Eisverhältnisse auf den Ozeanen und besonders in den polaren Gebieten, über die physikalischen und chemischen Eigenschaften des Meereises und auch über den Einfluß der polaren Eiskappen auf die atmosphärische und ozeanische Zirkulation.

Auf mehr als 400 Seiten werden im zweiten Teil des ersten Bandes die Probleme der dynamischen Ozeanographie behandelt, die sich aus den Erscheinungsformen der Meeresströmungen ergeben und auch die theoretischen Grundlagen und die Erklärung dieser Strömungsvorgänge und Beziehungen zu ozeanographischen Faktoren und die Einwirkung äußerer Kräfte auf die Wassermassen umfassen. Nach einer Übersicht über die für die geophysikalische Struktur der Meere maßgebenden Schwere-, Massen- und Druckfelder und über die zur Auswirkung kommenden äußeren und inneren Kräfte, über die Auswertung und Darstellung der Beobachtungsergebnisse von Strömungsmessungen wird die Theorie der Meeresströmungen in einem homogenen Ozean unter der Annahme, daß nur äußere Kräfte wirksam sind, entwickelt und werden die Bedingungen der Stabilität und der stationären Strömungen an Grenzflächen verschiedenartiger Wassermassen abgeleitet. Es folgt dann die Darstellung der Theorie der durch Dichteunterschiede verursachten Meeresströmungen in einem nichthomogenen Ozean, der Theorie der Strömungen in einer Meeresstraße und ihrer Anwendung auf einzelne Meeresstraßen, des Windeinflusses auf durch Dichteunterschiede bedingte Meeresströmungen, der Grundprinzipien der allgemeinen ozeanischen Zirkulation, der Zirkulation in der ozeanischen Troposphäre und Stratosphäre und schließlich der Hauptmerkmale der allgemeinen ozeanischen Zirkulation und ihrer physikalischen Erklärung.

Der zweite Band ist den periodischen Bewegungen in den Ozeanen gewidmet und behandelt im ersten Teil auf 240 Seiten die Oberflächen- und langen Wellen. Nach einer Klassifikation der verschiedenen Wellenarten wird die Theorie der kurzen und langen Wellen entwickelt und das theoretische Ergebnis mit Ergebnissen experimenteller Laboratoriumsversuche einerseits und mit den Ergebnissen verschiedener Beobachtungen von Meereswellen andererseits verglichen. In weiteren Abschnitten werden theoretische Ableitungen und Beobachtungsergebnisse über die Erzeugung, das Wachstum und die Ausbreitung von Wellen im offenen Meer, über Wellen im seichten Wasser und ihre Beeinflussung durch äußere Kräfte sowie über Brandungswellen gebracht. Es folgt ein längerer Abschnitt über Theorie und Beobachtungsergebnisse von langen Wellen in Kanälen und stehenden Wellen in teilweise oder ganz abgeschlossenen Bassins.

Den zweiten Teil des zweiten Bandes füllt auf 325 Seiten die Darstellung der theoretischen Untersuchungen und der Beobachtungsergebnisse der verschiedenen Erscheinungsformen der Gezeiten und Gezeitenströme. Einer Übersicht über die hauptsächlichsten Erscheinungsformen der Gezeiten und über die gezeitenerregenden Kräfte folgt die Darstellung der Gezeitentheorien (Gleichgewichtstheorie, dynamische Theorie, Kanaltheorie). Ein weiterer Abschnitt bringt eine Darstellung der Methoden und die Ergebnisse der harmonischen Analyse der Gezeitenbeobachtungen und der Methoden der Gezeitenprognose. In den Bereich der neueren Entwicklung der Gezeitentheorie führen die Ausführungen über Gezeiten und Gezeitenströme in Landnähe, wo der Einfluß der Erdrotation und der Reibung eine größere Rolle

spielt. Es folgt ein Überblick über die Gezeitenerscheinungen in Mittelmeeren, in Nebenmeeren, in Meeresstraßen und in Flußmündungsgebieten auf Grund von Beobachtungsergebnissen, woran sich an Hand von Kartendarstellungen eine Besprechung der Gezeiten der großen Weltmeere anschließt. In einem Abschnitt über Beziehungen der Gezeiten zu geophysikalischen und kosmischen Problemen werden die Gezeiten der festen Erde, die Deformation der Erdkruste durch die Meeresgezeiten und der Reibungseffekt der Gezeitenströme und sein Einfluß auf die Erdrotation und auf kosmische Phänomene kurz behandelt. Den Abschluß bildet eine Entwicklung der Theorie von internen Wellen und deren Verifikation durch Beobachtungsergebnisse.

Dieses Standardwerk der physikalischen Ozeanographie wird wohl in keiner geophysikalischen Bibliothek fehlen dürfen.

F. Steinhauser, Wien.

Methods and Techniques in Geophysics. Vol. I. Herausgegeben von S. K. Runcorn. Mit zahlreichen Textabb., VII, 374 S. New York-London: Interscience Publishers Inc. 1960. $ 10,00.

Mit Recht verweist der Herausgeber im Vorwort darauf, daß in den letzten Jahren mehrere Bücher erschienen sind, die geophysikalische Beobachtungsdaten und geophysikalische Theorien vermitteln, daß aber keine entsprechende Literatur vorhanden ist, die die Beobachtungsmethoden behandelt, die unter Anwendung der neuesten Fortschritte der physikalischen Technik die Gewinnung dieser Ergebnisse ermöglicht haben. Dies soll nun mit dem vorliegenden Buch nachgeholt werden und damit wird auch tatsächlich eine Lücke im modernen geophysikalischen Schrifttum ausgefüllt. Die dargelegten Methoden beziehen sich nur auf den festen Erdkörper.

Im ersten Abschnitt berichtet E. C. Bullard über die Methoden zur Messung des Temperaturgradienten im Boden, in Bohrlöchern, Bergwerken und Tunnels und im Meeresgrund. Anschließend behandeln sehr ausführlich A. D. Misener und A. E. Beck die Meßmethoden zur Bestimmung des Wärmeflusses durch die oberste Bodenschicht unter Berücksichtigung ihrer Leistungsfähigkeit und ihrer Fehlerquellen, und zwar die Methoden zur Messung des Temperaturgradienten, Laboratoriums- und Feldmethoden zur Messung der Wärmeleitfähigkeit und die Berechnung des Wärmeflusses unter Berücksichtigung der Störungen des Gleichgewichtswärmestromes durch die Eiszeiten, durch Hebung und Erosion des Bodens, durch die Topographie und durch lokale Wärmequellen.

T. F. Gaskell und P. Threadgold besprechen die Bohrlochvermessungstechnik unter Berücksichtigung von elektrischen Methoden, Methoden mit Hilfe von natürlicher oder künstlicher Radioaktivität und akustische Methoden mit einem Ausblick auf künftige Entwicklungen und auf das Mohole Project.

Die Technik der Messung der erdmagnetischen Elemente wird von K. Whitham eingehend dargestellt. Die Verfahren werden dabei nach Drehmomentsmethoden, Induktionsmethoden, besonders im Flugzeug und auf See anwendbare Saturationskernmethoden, Hall-Effekt-Methoden, Magnetostriktions-Methoden und Methoden, die auf der Ablenkung von freien Elektronen im Magnetfeld beruhen, und Protonenpräzessionsmethoden gegliedert. In einem Abschnitt über Messungen des Paläomagnetismus besprechen D. W. Collinson und K. M. Creer als Methoden zur Messung der natürlichen remanenten Magnetisierung astatische Magnetometer und Gesteins-

Generator-Magnetometer und außerdem Meßmethoden für andere magnetische Eigenschaften von Gesteinen.

In Besprechung der Methoden der Schweremessung auf See behandelt J. C. Harrison den Pendelapparat von Vening Meinesz und die theoretischen und praktischen Gesichtspunkte der Verwendung von Gravimetern auf See sowie die dafür entwickelten Instrumente. P. L. Willmore entwickelt die Theorie der verschiedenen Arten von Seismographenpendeln und bespricht die Eichmethoden. Details der verschiedenen Seismographentypen im Hinblick auf ihre praktische Verwendung und auch die druckempfindlichen Hydrophone und das Strain-Seismometer.

Der Beitrag von G. D. Garland über Erdströme behandelt nicht nur die Meßmethoden, sondern auch die Ergebnisse der Registrierungen im Hinblick auf langperiodische, tägliche und kurzperiodische Schwankungen, Störungstypen und vertikale Erdströme, die elektromagnetische Induktion in der Erde als Quelle der Erdströme und die Anwendung von Erdstrommessungen zur Erforschung des Erdinnern.

Schließlich berichten D. S. Hughes über Meßmethoden und Ergebnisse der Bestimmungen von Kompressibilität, Elastizität, Plastizität und Polymorphismus von Gesteinen bei hohem Druck und hoher Temperatur, und W. Markowitz über die Methoden der Längen- und Breitenbestimmung und über die Ergebnisse der Beobachtungen der Polschwankungen.

Aus dieser Übersicht ist ersichtlich, daß Meßmethoden aller Zweige der Geophysik behandelt werden. Im besonderen muß darauf hingewiesen werden, daß dabei nicht nur vor allem auch die modernsten Methoden berücksichtigt sind, sondern daß auch meist ihre Leistungsfähigkeit kritisch bewertet und Fehlermöglichkeiten aufgezeigt werden.

F. Steinhauser, Wien.

Handbook of Geophysics. Herausgegeben von C. F. Campen, Jr., A. E. Cole, T. P. Condron, W. S. Ripley, N. Sissenwine, I. Solomon. Revised Edition. Mit zahlreichen Textabb. und Tabellen, 663 S. New York: The MacMillan Company. 1960. $ 15,—.

Hauptaufgabe des vorliegenden umfangreichen Werkes ist es, möglichst ausführlich Ergebnisse meteorologischer und geophysikalischer Beobachtungen in Tabellen, sowie in graphischen und in Kartendarstellungen zu vermitteln, um sie der technischen Praxis und insbesondere der Luftfahrttechnik nutzbar zu machen. Damit wurde aber ein Werk geschaffen, das auch der meteorologischen und geophysikalischen Forschung als sehr ergiebige Informationsquelle wertvolle Dienste leisten wird.

Im ersten Abschnitt werden einige Vorschläge für eine Nomenklatur der verschiedenen Schichten der Atmosphäre diskutiert und in Tabellen und graphischen Darstellungen die Änderungen der einzelnen physikalischen Parameter mit der Höhe bis 1000 km nach dem ARDC-Modell 1959 im metrischen und im englischen Maßsystem wiedergegeben. Der Abschnitt über die Temperaturverhältnisse geht von den Energieumsätzen an der Erdoberfläche und in der Atmosphäre aus und bringt reichlich Angaben über die Temperaturen in der bodennahen Luftschicht, an der Bodenoberfläche und im Boden wie auch in der freien Atmosphäre und Karten der Temperaturverteilung verschiedener Art. Auch für Luftdruck und Luftdichte findet man

Angaben über die zeitliche und räumliche Verteilung, über die Höhenabhängigkeit und über die Veränderlichkeit, ferner Daten über die Windstruktur, über die Änderung der Windgeschwindigkeit mit der Höhe in der bodennahen Luftschicht und in der freien Atmosphäre, Strömungskarten der Nordhalbkugel in verschiedenen Höhen bis zum 50mb-Niveau und mittlere Windvektoren für verschiedene Höhenstufen in Abhängigkeit von der geographischen Breite und Länge. Einigen Angaben über stündliche und extreme Niederschlagsmengen, über Hagel, über die Änderung der Niederschlagskonzentration in der Wolke mit der Höhe, über statistische Daten von Wolkenbeobachtungen, über den Wassergehalt der Wolken folgt in Tabellen und in graphischen Darstellungen eine Übersicht über den heutigen Stand der Erkenntnisse über die Zusammensetzung der Luft und ihre Änderung mit der Höhe und über Art und Größenverteilung des Aerosols.

Aus dem Gebiet der Luftelektrizität werden Beobachtungsergebnisse über die Änderung der luftelektrischen Größen mit der Höhe und ihre zeitlichen und räumlichen Änderungen und Weltkarten der Gewitterhäufigkeit für jeden Monat und für jede Jahreszeit mitgeteilt. Aus dem Gebiet des Erdmagnetismus werden der Ursprung und die Form des Magnetfeldes der Erde, seine zeitlichen Änderungen und die zu ihrer Charakterisierung verwendeten Größen erklärt und Weltkarten magnetischer Feldgrößen sowie Tabellen der täglichen internationalen Charakterzahlen seit 1931, ihrer Monats- und Jahresmittel seit 1884 und der täglichen ΔH_1-Werte von Huancayo bzw. Sitka seit 1937 wiedergegeben. Auch Angaben über Zusammensetzung, Größe und Zahl der Meteore sowie über die Auswirkung der Meteore auf die Atmosphäre und eine Liste der jährlich wiederkehrenden Meteorschwärme und ihrer Ankunftszeiten findet man in dem Buch.

In einem besonderen Abschnitt werden die Parameter der Erdoberfläche behandelt, die für die Beurteilung der Tragfähigkeit des Bodens für den Verkehr und insbesondere für Flugzeuge von Bedeutung sind. Darunter finden sich auch Nomogramme zur Bestimmung der Eindringtiefe des Frostes, eine Klassifikation der verschiedenen Böden und Schneeformen in Abhängigkeit von physikalischen und meteorologischen Faktoren und physikalische Charakteristiken des Eises. Auch Angaben über verschiedene Formen des Zustandes der Meeresoberfläche, über Oberflächentemperatur und Salzgehalt des Meerwassers, über Mikroseismen, Erdbeben und Explosionswellen im Boden, über die Erscheinungen des Permafrost, über die Figur der Erde und über die Verteilung der Schwereanomalien sind in diesem Abschnitt zusammengestellt, soweit sie für die Praxis der Technik von Interesse sind.

In weiteren Abschnitten werden Beobachtungsdaten mitgeteilt, die für die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in den unteren Luftschichten bei verschiedenen Luftmassen und Wetterlagen und für die Sichtbestimmung von Bedeutung sind, ferner Beobachtungsdaten aus dem Bereiche der Ionosphäre, der Polarlichter und des Nachthimmelsleuchtens, spektrale Durchlässigkeits- und Absorptionswerte für Wärmestrahlung und Sonnenstrahlung. Zwei weitere Abschnitte bringen Angaben über den Aufbau der Sonne und über Vorgänge auf der Sonne, über solarterrestrische Beziehungen und über die Erscheinungen der kosmischen Strahlung. Abschließend findet man auch Angaben über die Struktur der Kondensstreifen von Düsenflugzeugen, über ihre Vorhersage sowie über Raketen und meteorologische Instrumente und ihre Leistungsfähigkeit und schließlich auch über die Schallausbreitung in der Atmosphäre.

F. Steinhauser, Wien.

Lehrbuch der allgemeinen Geophysik. Von M. Toperczer. Mit 158 Textabb., VI, 384 S. Wien: Springer-Verlag. 1960. S 384,—.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen, die der Autor an der Wiener Universität gehalten hat, entstanden und in seinem Aufbau und in der klaren und verständlichen Darstellungsweise darnach ausgerichtet, den Studierenden sowie auch anderen Interessenten an der Geophysik und ihren Forschungsergebnissen als Lehrbuch und Führer durch dieses sehr umfangreiche Wissensgebiet zu dienen. Dadurch wird einem wirklichen Bedürfnis entsprochen und eine Lücke in der heutigen geophysikalischen Literatur geschlossen. Der Inhalt des Buches ist auf die Physik des festen Erdkörpers beschränkt.

Das Stoffgebiet wird sinnvoll in drei Gruppen unterteilt: Die erste Gruppe umfaßt unter der Bezeichnung Geomechanik die Statik (Figur der Erde, Massenverteilung und Verteilung der Schwerkraft) und die Dynamik (Änderung der Schwere und Gezeiten, geotektonische Kräfte und Elastomechanik). Die zweite Gruppe beinhaltet unter der Bezeichnung Thermodynamik den Vulkanismus und die Verteilung der Zustandsgrößen in der Erde. Die dritte Gruppe betrifft elektrische und magnetische Erscheinungen.

Ausgehend von der historischen Entwicklung werden im ersten Abschnitt die theoretischen Ableitungen zur Bestimmung der Figur der Erde gebracht und anschließend die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Niveauflächen bzw. des Geoids mit Hilfe von Messungen auf der Erdoberfläche dargestellt und darunter besonders die Verfahren der Schweremessung und der Reduktion der Schwerewerte. Dazu gehört auch die Besprechung der Schwerestörungen und der Probleme der Isostasie sowie die Bestimmung der Masse und Dichte der Erde.

Im zweiten Abschnitt werden als dynamische Vorgänge zunächst die Gezeitenbewegungen, die Polhöhenschwankungen und die Schwankungen der Erdrotation behandelt. Daran schließen sich Ausführungen über die auf Vorgänge in der Erdkruste selbst, das ist auf Tektogenese, zurückzuführenden Änderungen und im Zusammenhang damit die Darstellung der stofflichen Zusammensetzung der Erde, ihrer physikalischen Eigenschaften, der geotektonischen Kräfte, des Vulkanismus und der verschiedenen geotektonischen Hypothesen.

Der dritte Abschnitt ist der Seismik gewidmet und behandelt die Einteilung und Entstehung der Erdbeben, die verschiedenen Arten von Bebenwellen und ihre Ausbreitung in und auf dem Erdkörper, die Methoden der Bestimmung der Wellenbahnen, die Theorie der Seismographen und die verschiedenen Seismographentypen, die Auswertung und Verarbeitung der Beobachtungsergebnisse, die Erdbebengeographie und Erdbebenstatistik.

Im vierten Abschnitt kommt das umfangreiche Gebiet des Erdmagnetismus zur Darstellung. Nach einer Erläuterung der allgemeinen Grundbegriffe, des Verhaltens der Materie im Magnetfeld, des magnetischen Feldes permanenter Magnete und stromdurchflossener Leiter und der Wirkung zweier Magnete aufeinander, werden die Meßmethoden und die Art der Verarbeitung und Reduktion magnetischer Messungen beschrieben. Es folgt eine Darstellung der räumlichen Verteilung der Komponenten und Elemente des erdmagnetischen Feldes, der kurzzeitigen Änderungen des Magnetfeldes der Erde und ihrer Ursachen sowie der Säkularvariation des magnetischen Erdfeldes.

Im fünften Abschnitt werden die Methoden und Ergebnisse der Altersbestimmung der Erde, der thermische Zustand des Erdkörpers und seine

Änderung, der durch die Verteilung der Zustandsgrößen des Erdinneren bestimmte Aufbau der Erde und die im Erdinneren gelegenen Ursachen des erdmagnetischen Feldes behandelt.

Das Buch wird der Ausbildung von Geophysikern wie auch der Information von anderen Interessenten an Ergebnissen der geophysikalischen Wissenschaft sehr gute Dienste leisten.

F. Steinhauser, Wien.

Geophysik. Herausgegeben von J. Bartels. (Das Fischer Lexikon, Band 20.) Mit 104 Textabb., 373 S. Frankfurt am Main: Fischer Bücherei K. G. 1960. DM 3,30.

In der sehr begrüßenswerten Reihe der Fischer-Lexika ist nun auch eine sehr gediegene und reichhaltige Übersicht über das Gesamtgebiet der Geophysik erschienen. Das Lexikon enthält nicht nur die Geophysik des festen Erdkörpers, sondern belehrt auch über die wichtigsten Tatsachen des Wasserhaushaltes und der hohen Atmosphäre, über ozeanographische und meteorologische Erscheinungen und Probleme. Die Fülle des dargestellten Stoffes im Verhältnis zum Umfang des Werkes ist auch für den Fachmann erstaunlich. Für die sachliche Richtigkeit der Darstellung bürgen die Namen der Mitarbeiter und des Herausgebers, der selbst einen sehr großen Teil der Beiträge geliefert hat.

Die Darstellung ist durchwegs leicht verständlich und, ohne von mathematischen Hilfsmitteln viel Gebrauch zu machen, zur Klärung der behandelten Probleme und Sachverhalte ausreichend. Auch die neuesten Ergebnisse und Fortschritte, wie sie durch das Internationale Geophysikalische Jahr bis jetzt bekanntgeworden sind, wurden schon berücksichtigt. Das Buch ist sowohl Fachleuten und Studierenden als Nachschlagewerk und Gedächtnisstütze als auch dem gebildeten Laien als ausgezeichnete und einwandfreie Informationsquelle sehr zu empfehlen. Sein geringer Preis wird ihm gewiß weite Verbreitung sichern.

M. Toperczer, Wien.

Some Ionospheric Results Obtained During the International Geophysical Year. (Proceedings of a Symposium organised by the URSI/AGI Committee, at Brussels, Belgium, September, 1959.) Herausgegeben von W. J. G. Beynon. Mit 266 Abb., XII, 401 S. Amsterdam-London-New York-Princeton: Elsevier Publishing Company. 1960. F. 38.—.

Obwohl bereits bei der Planung des Internationalen Geophysikalischen Jahres (IGJ) eine möglichst rasche Bearbeitung des anfallenden Beobachtungsmaterials als wünschenswert, ja notwendig, hingestellt worden war, überrascht der vorliegende Band doch durch die Fülle von Ergebnissen, die bereits im Herbst 1959 in einem Symposium zur allgemeinen Diskussion gestellt werden konnten. Die vorgetragenen sechzig Arbeiten wurden im Rahmen von acht Gruppen besprochen; an jedes dieser Hauptthemen schloß sich eine ausführliche Aussprache an, die ebenfalls in den Band aufgenommen wurde. Die Titel dieser acht Stoffgruppen lauten: I. F2 Layer Phenomena, II. High Latitude Studies, III. Disturbance Phenomena, IV. Ionospheric Irregularities, V. N(h)-Profiles, VI. Absorption, VII. Drifts, VIII. Noise, Whistlers, Rockets, Satellites. Die Vielzahl der während des IGJ erzielten Ergebnisse tritt freilich erst richtig in Erscheinung, wenn man die Titel

der Vorträge im einzelnen übersieht. In der ersten Gruppe finden sich so u. a. Untersuchungen über äquatoriale Anomalien und erfreulicherweise auch einige Berichte über die — bisher nicht zugänglich gewesenen — ionosphärischen Verhältnisse über dem russischen Raum. Eine in sich einigermaßen abgeschlossen wirkende Vortragsserie bilden die sechs Berichte des zweiten Abschnittes, dessen Themenbereich ja auch wesentlich enger begrenzt ist. Der dritte Abschnitt behandelt vor allem Zusammenhänge zwischen solaren, magnetischen und ionosphärischen Störungen, zwei weitere Berichte befassen sich mit den Erscheinungen, die im Gefolge der beiden im August 1958 in über 100 km Höhe zur Explosion gebrachten Atombomben beobachtet werden konnten. In dem nun folgenden Abschnitt werden unter dem vielleicht ein wenig irreführenden Titel „Ionosphärische Unregelmäßigkeiten" fast ausschließlich die vielfältigen Erscheinungsformen gestreuter Ionosphärenechos erfaßt: ihre tägliche und jährliche Periodizität und insbesonders die Streuphänomene, die in den während des IGJ besonders gut besetzten Äquatorzonen beobachtet werden konnten.

Einen nicht unwesentlichen Schritt vorwärts bedeuten die im IGJ beträchtlich intensivierten Bestrebungen, aus den Echolotungen die *tatsächliche* Höhenverteilung der Elektronenkonzentration zu ermitteln. Bislang hatte man sich ja mit der sogenannten „scheinbaren" Höhe der jeweiligen Reflexionsstellen zufrieden gegeben, da diese unmittelbar aus den Beobachtungen erhalten werden konnte. Für die Beantwortung der meisten physikalischen Fragen ist sie allerdings nicht brauchbar. Andrerseits ist der Zusammenhang zwischen dieser scheinbaren und der jeweiligen wahren Höhe mathematisch sehr schwierig, so daß — selbst unter Verwendung moderner elektronischer Rechenanlagen — auf Näherungslösungen zurückgegriffen werden muß. Über die in verschiedenen Instituten entwickelte Methodik solcher Berechnungen und auch über erste Ergebnisse berichten einige Autoren im fünften Abschnitt.

Sehr problematisch und in ihrem physikalischen Aussagewert umstritten sind noch immer die an zahlreichen Stationen durchgeführten Absorptions- und Driftmessungen. Hinsichtlich der ersteren gibt es mehrere Verfahren, die Dämpfung der bei Echolotungen verwendeten elektromagnetischen Wellen zu bestimmen, die sie beim Durchgang durch die Ionosphäre erfahren. Die im Abschnitt VI vorgelegten — vielfach ausdrücklich als vorläufig bezeichneten — Meßergebnisse lassen erkennen, daß derzeit weder die Theorie noch die Praxis ein abschließendes Bild zu geben vermögen. Durchaus ähnlich liegen die Verhältnisse auch für die (horizontalen) Driftbeobachtungen, über die sieben Berichte dem Symposium vorlagen. Ob man berechtigt ist, diese Erscheinungen in der Ionosphäre als einen tatsächlichen „Ionosphärenwind" anzusehen, bleibt aber weiterhin offen und ungeklärt. Ein weiterer Bericht dieses Abschnittes befaßt sich schließlich mit vertikalen Bewegungsvorgängen in der F-Schicht.

Der letzte Abschnitt des Buches ist in der Hauptsache den Beobachtungen des „atmospheric radio noise" gewidmet; daneben finden sich einige vorläufige Ergebnisse der Whistlerbeobachtungen entlang des 70° W-Meridians, ferner einige Erläuterungen der Fortschritte, die mittels der Raketen- und Satellitentechnik hinsichtlich der Ionosphärenforschung erzielt werden konnten. Ein letzter Bericht schließlich befaßt sich mit der Drehung der Polarisationsebene, die die von Satelliten ausgestrahlten Radiowellen im Bereich der ionisierten Atmosphärenschichten erfahren.

Für jeden, der sich eingehender mit der Erforschung der Ionosphäre be-

häftigt, wird der vorliegende Band von größtem Nutzen sein, da in ihm mindest die wichtigsten neuen Beobachtungstatsachen aufgezeigt werden, ie wir erst durch das umfangreiche Beobachtungsprogramm des Internatioalen Geophysikalischen Jahres gewinnen konnten. Eine kleine Statistik ag hierzu ergänzen, daß ein volles Viertel der Berichte aus japanischen, ne nahezu gleich große Anzahl aus englischen Quellen stammt, während ie USA und die UdSSR mit je einem Sechstel beteiligt sind. Während eutschland immerhin noch mit fünf Berichten (hauptsächlich von der vom ax-Planck-Institut für Aeronomie in Tsumeb, im ehemaligen Deutschüdwestafrika, betriebenen Station) vertreten ist, vermißt man bedauerlicherweise Ergebnisse aus Frankreich ganz.

O. Burkard, Graz.

The Airflow over Mountains. Von P. Queney, G. A. Corby, N. Gerbier, H. Koschmieder, J. Zierep. Herausgegeben von M. A. Alaka. (WMO Technical Note No. 34.) Mit 85 Textabb., V, 135 S. Genf: Secretariat of the WMO. 1960. sFr. 22,—.

Die vorliegende Monographie behandelt ein sehr wichtiges und interssantes meteorologisches Phänomen, das gerade in den letzten Jahren wieder ingehende Beachtung durch systematische Beobachtungen und theoretische Untersuchungen fand. Es ist allgemein bekannt, daß die Gebirge einen vieltigen Einfluß auf die Luftströmungen ausüben, der von den kleinräunigen Turbulenzeffekten in der planetarischen Grenzschicht bis zu Änderungen er Allgemeinzirkulation von globalem Ausmaß reicht. In der vorliegenden bhandlung werden fast ausschließlich nur quasistationäre Gravitationsvellen betrachtet, deren Wellenlänge eine Größenordnung von 1 bis 20 km ufweist. Vom theoretischen Standpunkt aus gesehen hat die Beschränkung uf den Gravitationswellentyp den Vorteil, daß linearisierte Störungsgleihungen zur Beschreibung des Vorganges herangezogen werden können, ie für den stationären Fall auf verhältnismäßig handliche Differentialleichungen führen.

Die Monographie ist in drei Kapitel gegliedert. Teil I enthält eine Übericht über die Beobachtungsergebnisse. Hier liegt der Schwerpunkt auf zwei roßangelegten Untersuchungen, nämlich dem Sierra Nevada-Projekt (Holmboe und Klieforth) und dem Alpenprojekt (Berenger und Gerbier). Durch ine Reihe ausgezeichneter Abbildungen werden die Hauptergebnisse klar erausgestellt, so daß sich der Leser ein gutes Bild über die verschiedenen Effekte machen kann. Überdies finden sich in diesem Teil auch eine Anzahl arbiger Wolkenaufnahmen, die zu den schönsten derartigen Photographien ehören.

Teil II beschäftigt sich mit der Theorie der Gravitationswellen, induziert durch Gebirge verschiedener Gestalt. Ausgehend von den Störungsgleichungen für ein stationäres, adiabatisches Modell werden die Lösungsansätze der bekanntesten Autoren kommentiert. Es zeigt sich deutlich, daß die Theorie für viele Beobachtungsergebnisse eine qualitativ richtige Erklärung liefert. Quantitative Übereinstimmung kann nicht immer verlangt werden, solange das überströmte Hindernis durch mehr oder weniger realistische, analytische Ansätze approximiert wird. Es sei hier jedoch auf eine (in der Monographie nicht erwähnte) Arbeit von F. Steinhauser (Arch. Met. Geoph. Biokl., B, 2, 1950, S. 39—64) verwiesen, die eine überzeugende quantitative Bestätigung

von LYRAS Theorie der Druckerniedrigung im Lee eines relativ kleinen Hindernisses (Gebirgszug der Kleinen Karpathen) ergab. Nach weiteren kurzen Bemerkungen über zeitabhängige (nicht stationäre) Lösungsansätze und über numerische Lösungsmöglichkeiten werden noch Modellexperimente diskutiert.

Teil III ist der Anwendung der bisherigen Ergebnisse für Zwecke der Luftfahrt gewidmet. Hier zeigt sich recht deutlich, daß auch noch Flugzeugen der modernsten Konstruktionen durch Wellenformationen Gefahren drohen können. Die zeitgerechte Vorhersage von Leewellen, Rotoren etc. ist daher eine wichtige und sehr ernstzunehmende Teilaufgabe des Prognostikers, der gezwungen ist, Flüge für Motor- oder Segelflugzeuge im Bereich von Gebirgszügen zu beraten.

H. REUTER, Wien.

Ebbe und Flut. Von G. SAGER. Mit 133 Textabb., 251 S. Gotha: VEB Hermann Haack, Geographisch-Kartographische Anstalt. 1959. DM 11,50.

Das Buch geht zum Teil auf öffentliche Vorträge des Verfassers zurück und ist dementsprechend in einer populärwissenschaftlichen Art abgefaßt, die dadurch gekennzeichnet ist, daß alle mit Ebbe und Flut zusammenhängenden Erscheinungen eingehend beschrieben und auf möglichst einfache und verständliche Art erklärt werden. Der Fachmann wird mit Interesse die Ausführungen über die Bedeutung der Gezeitenerscheinungen für die Lebensverhältnisse in den Nordseeküstengebieten, über den Gezeitenhub in den verschiedenen Meeren der Erde, über die Gezeitenströme und ihre Darstellung, über Flutbrandungen in den verschiedenen Gewässern und über Sturmfluten besonders an der Nordseeküste lesen. Es sei darauf hingewiesen, daß in diesen Abschnitten viele bemerkenswerte und interessante Einzelbeispiele angeführt sind. Besonderes Interesse darf auch die Darstellung der Wandlungen des Küstenbildes der Nordsee von prähistorischen Zeiten bis zur Gegenwart beanspruchen. Im Zusammenhang mit den Gezeitenwirkungen werden auch Probleme der Schaffung von Küstenneuland, des Uferschutzes, der Dammbauten, der Anlage von Seehäfen im Gezeitengebiet, Probleme der Versandung und Schlammführung u. dgl. behandelt. Ein eigener Abschnitt ist der Ausnutzung der Gezeitenkräfte, der Bestimmung des Leistungsvermögens der Gezeiten, den historischen und den gegenwärtigen Plänen und Versuchen zur Energiegewinnung aus den Gezeiten und der Darstellung von verschiedenen konkreten Projekten für Gezeitenkraftwerke gewidmet. Auch die Methoden der Messung des Tidenhubes und der Messung der Gezeitenströme sowie die Verfahren zur Berechnung und Vorhersage der Gezeiten werden beschrieben. Zahlreiche instruktive Abbildungen unterstützen die Darstellung wesentlich. Es wird dabei allerdings als sehr störend empfunden, daß die Numerierung der Abbildungen nicht fortlaufend, sondern ziemlich ungeordnet erfolgt und Doppelnumerierungen vorkommen, wenn auch dabei zwischen „Abbildungen" (photographische Aufnahmen) und „Figuren" (schematische Darstellungen) unterschieden wird.

F. STEINHAUSER, Wien.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5.
Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. F. Steinhauser, Wien XIX, Hohe Warte 38.
Druck: Adolf Holzhausens Nfg., Wien VII, Kandlgasse 19-21

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

besorgt. Die Literaturhinweise erfolgen durch im laufenden Text in Klammern eingefügte Nummern, die genaue Zitate bezeichnen, die in einem Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit zusammenzustellen sind.

Die Manuskripte sind möglichst in Maschinenschrift auf einseitig beschriebenen, fortlaufend paginierten Blättern abzufassen. Abbildungsvorlagen sind in so sauberer Wiedergabe einzusenden, daß sie entweder unverändert verwendet oder durch Zeichner des Verlages einwandfrei neu gezeichnet werden können. Die Beschriftung, die innerhalb der Zeichnung angebracht wird, ist nur mit weichem Bleistift einzutragen.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können weitere Separata zu einem angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Autoren erhalten eine erste Fahnenkorrektur, die sie nach erfolgter Durchsicht an den Verlag zu senden haben; eine Umbruchkorrektur wird den Autoren nicht zugestellt. Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Manuskripte und Anfragen sind an einen der beiden unterzeichneten Herausgeber

Dozent Dr. **W. Mörikofer**
Physikalisch-Meteorologisches Observatorium
Davos-Platz, Schweiz

Prof. Dr. **F. Steinhauser**
Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik
Wien XIX, Hohe Warte 38, Österreich

zu richten; alle geschäftlichen Mitteilungen an:

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5
Telephon 63 96 14 Serie. Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Der Verlag

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie

Herausgegeben von

Doz. Dr. **W. Mörikofer** und Prof. Dr. **F. Steinhauser**
Physikalisch-Meteorologisches Observatorium, Davos
Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien

Serie B: **Allgemeine und biologische Klimatologie**

Zuletzt erschien:

Band 11, Heft 2. (Abgeschlossen im Juli 1961.) Mit 58 Textabbildungen. 138 Seiten. 1961. S 296.–, DM 47.–, sfr. 50.50, $ 11.75

Inhaltsverzeichnis: **Valko, P.** Untersuchung über die vertikale Trübungsschichtung der Atmosphäre. — **Schulze, R.** Über die Verwendung von Polyäthylen für Strahlungsmessungen. — **Berger, F.** Über den „Taucheffekt" bei der Lichtmessung über und unter Wasser. — **Ambach, W.** und **H. L. Habicht.** Ein thermoelektrischer Strahlungsbilanzmesser zur Bestimmung der in oberflächennahen Eisschichten eines Gletschers absorbierten Strahlungsenergie. — **Primault, B.** Nouveaux essais comparatifs de la mesure de l'évaporation. — **Buchbesprechungen.**

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Neuerscheinung:

Handbuch der Aerologie

Geschichtliche Entwicklung — Thermodynamische Grundlagen
Arbeits- und Meßmethoden — Meßtechnik — Ergebnisse und Anwendungen

Herausgegeben von Prof. Dr. W. Hesse, Leipzig

1961. VII, 897 Seiten mit 455 Abbildungen und 91 Tabellen, Gr.-8°
Kunstleder DM 80.—

Mit zunehmender Erweiterung des Netzes der meteorologischen Stationen, mit zunehmender Höhe des zu Gebote stehenden meteorologischen Beobachtungsraumes, weiterer Präzisierung der Meß- und Registriergeräte sowie laufender Vervollkommnung der Flugtechnik ist das Gebiet der Aerologie zu einem bedeutenden Forschungskomplex innerhalb der Meteorologie mit selbständiger Thematik und Funktion geworden. Die genannten Themen werden von namhaften Fachwissenschaftlern des In- und Auslandes behandelt. Zu empfehlen ist das Buch nicht nur dem Wissenschaftler und Praktiker, sondern auch dem Studierenden der Meteorologie.

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT
Geest & Portig K.-G., Leipzig

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Meteorologie der Strahlströme (Jet Streams)

Von

Dr. Elmar R. Reiter

Universitätsdozent für Meteorologie und Geophysik, Universität Innsbruck
Associate Professor of Atmospheric Science, Colorado State University, Fort Collins, U. S. A.

Mit 192 Textabbildungen. XI, 473 Seiten. Gr.-8°. 1961
Ganzleinen S 844.—, DM 134.—, sfr. 144.10, $ 33.50

Die „Meteorologie der Strahlströme" geht weit über den Rahmen der bisher im deutsch- und fremdsprachigen Raum erschienenen Jet-Stream-Monographien hinaus. Es wird hier der Versuch vorgelegt — ausgehend von einer detaillierten Behandlung des Phänomens atmosphärischer, ozeanischer und experimentell erzeugbarer Strahlströme —, einen neuartigen Ausblick auf die moderne Synoptik und Klimatologie zu geben. Soweit dies möglich war, wurde auf theoretische Grundlagen eingehend Bezug genommen, ohne dabei die Gesichtspunkte der Synoptik und der angewandten Luftfahrtmeteorologie zu übersehen. Die 1841 Literaturhinweise bieten einen wertvollen Ausgangspunkt für Forschung und Studium.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung